TITULO : El trabajo con variables en los ejercicios de geometría plana. Su animación para la televisión.

AUTOR : Prof. Jacinto Hernández Ávalos.
IPVCE "Comandante Ernesto Guevara"

Resumen

El presente trabajo es una experiencia que muestra la importancia que representa para la efectividad del proceso de enseñanza de la Matemática el logro de habilidades en el trabajo con variables a través de los ejercicios de Geometría Plana y, por otra parte, cómo se reactivan y refuerzan los contenidos de Geometría Plana con la utilización de situaciones en las que se hace necesario la aplicación del trabajo con variables.
Expresado de otra manera, cómo el trabajo con variables puede apoyar a la Geometría Plana y cómo la Geometría Plana puede apoyar al trabajo con variables. Toda esta experiencia se ha estado desarrollando en nuestro Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas a través de la aplicación a los alumnos de ejercicios integradores de contenidos, tanto en las clases de Álgebra como en las de Geometría y los resultados obtenidos han sido muy favorables.
Se expresan en el trabajo las fundamentaciones metodológicas y se exponen ejemplos resueltos y la manera de explicarlos animados con el uso de la computadora, mostrando así la efectividad de ese medio en este sentido.
Esta experiencia se estuvo aplicando en las teleclases de repaso de los contenidos de Matemática para el ingreso a la Educación Superior y en las de consolidación para el Onceno Grado por el Canal Educativo en los finales del curso escolar 2001-2002.
El trabajo expone 10 ejemplos resueltos en PowerPoint mostrando de la manera que aparecen en la pantalla de la computadora o el televisor para que sean asimilados por los estudiantes.
Se proponen además, en los anexos, 80 ejercicios de Geometría Plana en los cuales hay que aplicar, en su resolución, el trabajo con variables.
El contenido de esta experiencia, en manos de profesores y de alumnos que estudian en las carreras de perfil pedagógico, puede contribuir a elevar el grado de preparación de nuestros docentes.

Introducción

En nuestro sistema educacional el alumno comienza a trabajar con las variables desde los primeros grados, realizando sustituciones de valores y cálculo en expresiones sencillas que le permiten pasar a la resolución de ecuaciones mediante reflexiones lógicas y luego, en la enseñanza secundaria, resolver ecuaciones despejando las variables mediante métodos algorítmicos de trabajo. Todo este contenido se va trabajando con la sucesiva ampliación de los dominios numéricos y el trabajo con términos semejantes, lo que se conjuga luego con las técnicas del trabajo algebraico mediante signos de agrupación, descomposición en factores, productos notables, hasta llegar a resolver sistemas de ecuaciones lineales, y ecuaciones cuadráticas. Ya en la enseñanza preuniversitaria se profundiza todo este proceso de trabajo con variables cuando se trabaja con la descomposición en factores lineales aplicando la división sintética o método de Ruffini aplicado a la resolución de ecuaciones con grado mayor o igual que 3. También en este nivel se resuelven ecuaciones fraccionarias, ecuaciones con radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y las combinaciones de todas ellas.

Por otra parte en el estudio de la Geometría, desde los primeros grados el alumno va recibiendo las primeras nociones de figuras geométricas y las formas y tamaños que las mismas pueden tener para llegar luego a asimilar sus propiedades y proceder a aplicar las fórmulas para el cálculo del área y perímetro. Trabaja con los conceptos de punto, recta, segmento, plano y realiza las primeras demostraciones geométricas a través de los ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante. Ya a esta altura hace aplicaciones sencillas de trabajo con variables y resolución de ecuaciones aplicando fórmulas, relaciones de igualdad entre ángulos, teoría del ángulo exterior de un triángulo, suma de ángulos interiores de un triángulo o un cuadrilátero, clasificación de triángulos y el Teorema de Pitágoras. Todo este trabajo toma más fuerza con el estudio de la circunferencia y el círculo, los ángulos en la circunferencia y las fórmulas para el área y perímetro. Al trabajo con la igualdad y semejanza de triángulos se le presta una especial atención debido a la posibilidad y necesidad de utilizar en las demostraciones la mayoría de los teoremas y propiedades que se estudian y poder trabajar con el cálculo y la aplicación de variables en muchos ejercicios, sobre todo, en los que se aplica el grupo de teoremas de Pitágoras.

En el transcurso de los programas y atendiendo al nivel algebraico y geométrico que va adquiriendo el alumno es posible ir proponiendo ejercicios en los cuales se necesita la aplicación del trabajo con variables para establecer determinadas igualdades y resolver ecuaciones sencillas que nos conduzcan a obtener valores numéricos que den respuesta a la pregunta que se hace; es en este sentido en lo que se basa fundamentalmente el contenido de esta experiencia y cómo debe ser aprovechado por el profesor cada uno de estos momentos para que el alumno aprecie la posibilidad de aplicación, en los ejercicios de cálculo geométrico, de todo el trabajo con el álgebra que ha estado recibiendo a través de su formación académica, y a su vez, cómo puede aplicarse o sistematizarse el contenido geométrico a través del uso de las variables en los diferentes ejercicios.

EL TRABAJO CON VARIABLES EN LOS EJERCICIOS DE GEOMETRÍA PLANA

Ejercicios de Geometría Plana

Aplicación interactiva

Ejercicios de trabajo con variables

Se establece a través de ejercicios en los que se necesita la aplicación de relaciones y establecer cálculos.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

El hecho de aplicar el trabajo con variables a los ejercicios de la Geometría Plana es una meta a la cual todo profesor debe aspirar y que conlleva a la posibilidad de la interacción del álgebra con la geometría y que esta vinculación no se vea jamás disociada. No se trata de aplicar las posibilidades que nos brinda la geometría analítica a los ejercicios, sino de ver en cuáles ejercicios de la geometría sintética se puede aplicar el trabajo con variables para llegar a responder las preguntas que se nos imponen y a la vez, como ya lo hemos expresado antes, profundizar en los contenidos de la Geometría Plana a través del uso del trabajo con las variables.

Desde hace más de 4 años esta forma de trabajo nos ha dado muy buenos resultados, en especial en aquellos ejercicios integradores de contenidos que nos refuerzan la preparación de nuestros alumnos, a partir del Décimo Grado, para el ingreso a la Educación Superior.

Durante muchos años en nuestro país se enseñó la Matemática por ¨partes¨ . Hubo momentos en que un mismo alumno la recibía por un profesor para la llamada Aritmética y otro para la Geometría. Afortunadamente desde hace más de cuatro décadas esto ha cambiado, pero aún quedan algunos que siguen viendo la Matemática como algo compartimentado.

De las muchas relaciones que se pueden establecer entre los distintos aspectos de nuestra asignatura, la relación **Trabajo con Variables – Geometría** tal vez es la más importante en el nivel medio de nuestra enseñanza, no solo visto desde la posición de su posible aplicación intramatemática sino también la extramatemática.

Nos lleva este propósito al pensamiento algebraico dentro de la Geometría y al no ver por separados estos dos temas tan importantes para el desarrollo del pensamiento lógico de nuestro alumnado.

Es, en definitiva, enseñarlos a pensar algebraicamente (cuando sea necesario) en la resolución de un ejercicio de Geometría y no quedarse cruzados de brazos ante un ejercicio que requiera de la aplicación de determinadas variables para obtener relaciones que nos conduzcan al despeje en una fórmula, a la resolución de una simple ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales o cuadráticos, ecuación con radicales, fraccionarias o cuadráticas.

No se trata de forzar el uso de las variables, sino de aplicarlas, como algo muy normal, cuando se esté impartiendo cualquier tema del trabajo con variables, en un ejercicio de la Geometría Plana con contenido geométrico ya estudiado y, por otra parte, aprovechar determinados ejercicios de la Geometría Plana en el sentido de reforzar su estudio, valiéndonos de la posibilidad de aplicar el uso de las variables, para llegar a obtener los resultados pedidos y hacer ver así su aplicación en la Geometría.

Destacamos, además, que muchos de estos ejercicios para el trabajo con las variables en la Geometría Plana no nos ofrecen por lo general el gráfico para su resolución y nos vemos impuestos a tener que hacer una modelación más exhaustiva al tener que realizar un esbozo del gráfico que necesitamos para la resolución del problema propuesto, o tal vez tener que hacer alguna que otra construcción auxiliar; esto hace que se adquiera una habilidad adicional que nos impone un mayor nivel de análisis y abstracción.

En resumen, se trata de ayudar, mediante el Trabajo con Variables, a resolver los problemas que se nos han estado presentando en la Geometría Plana y por otra parte, ayudar a través de la Geometría Plana, al desarrollo de habilidades en las muchas formas que se nos puede presentar el empleo del Trabajo con Variables.

<u>CONTENIDOS QUE RECIBE EL ALUMNO Y QUE PUEDEN RELACIONARSE ENTRE SÍ PARA HACER POSIBLE LA APLICACIÓN DE LAS VARIABLES EN LOS EJERCICIOS DE GEOMETRÍA PLANA</u>

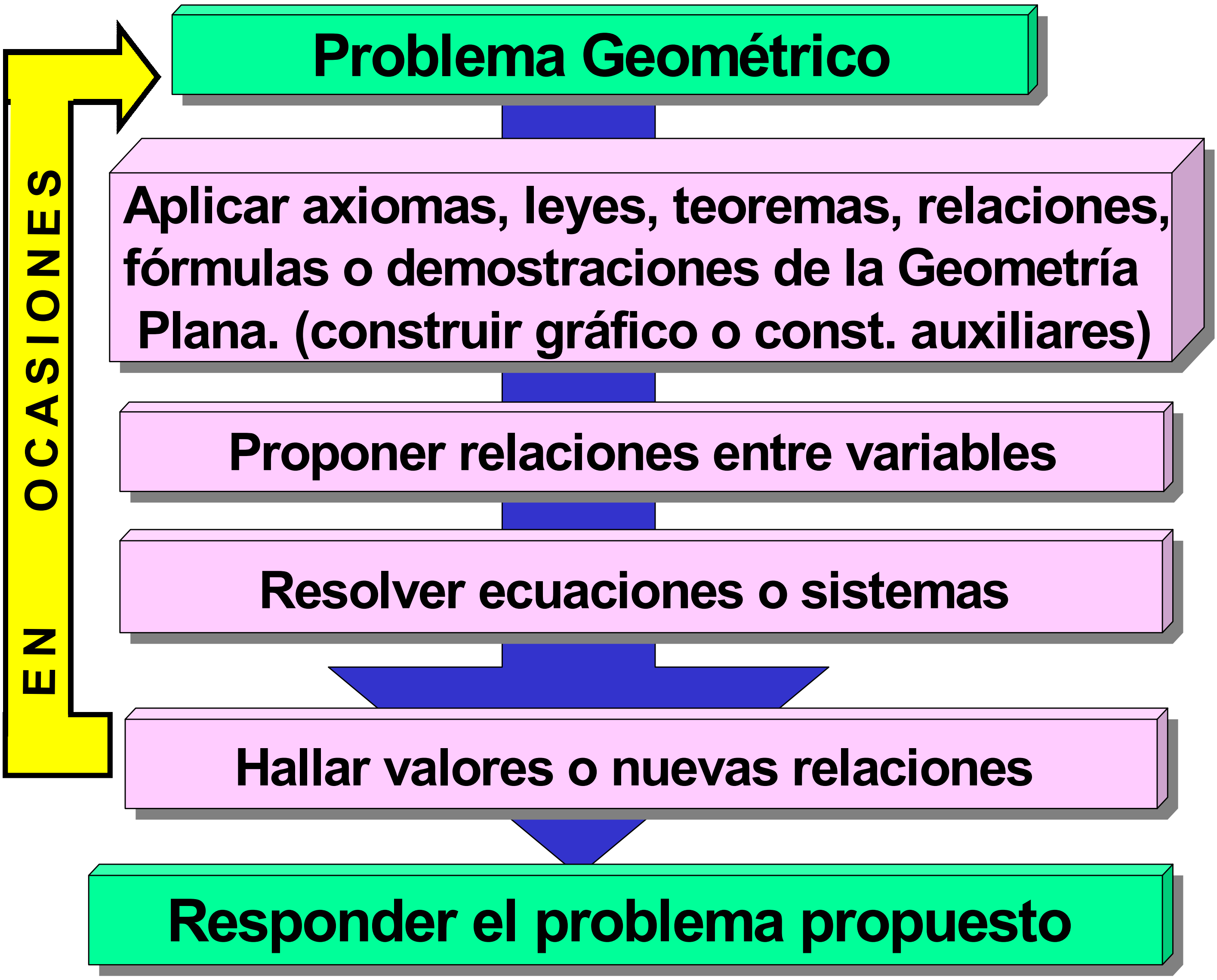
(El contenido de cada celda puede relacionarse con el de todas las que están en la tabla)

TRABAJO CON VARIABLES	GEOMETRÍA PLANA
-Planteo de ecuaciones. **(se relaciona con todas y así ocurre con todas las celdas)**	-Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una recta secante. *Ángulos correspondientes. *Ángulos alternos. *Ángulos conjugados. *Ángulos adyacentes.
-Reducción de términos semejantes.	-Suma de ángulos interiores de un triángulo.
-Despeje de variables.	-Ángulo exterior de un triángulo.
-Uso de signos de agrupación.	-Ángulos con sus lados respectivamente paralelos.
-Resolución de ecuaciones lineales.	-Ángulos con sus lados respectivamente perpendiculares.
-Descomposición factorial de expresiones algebraicas. *factor común *diferencia de cuadrados *trinomio cuadrado perfecto *trinomio de la forma x^2+px+q *trinomio de la forma mx^2+px+q $(m\neq0)$ *agrupamiento	-Relaciones entre ángulos. *Ángulos complementarios. *Ángulos suplementarios. *Ángulos explementarios. *Ángulos opuestos por el vértice. *Ángulos consecutivos. *Ángulos correspondientes en un mismo triángulo, triángulos iguales o en triángulos semejantes.
-Aplicar la descomposición factorial en la simplificación de las operaciones de cálculo.	-Clasificación de triángulos. *Escalelo, isósceles y equilátero. *Acutángulo, rectángulo y obtusángulo.
-Resolución de ecuaciones cuadráticas.	-Rectas notables en los triángulos. *Mediatrices, bisectrices, alturas y medianas
-Resolución de ecuaciones fraccionarias.	-Área y perímetro de figuras planas y el trabajo con los diferentes elementos en las fórmulas. *Triángulos (isósceles, equilátero, rectángulo, obtusángulo) *Cuadriláteros y sus propiedades. (trapecios, paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrado) *Circunferencia y Círculo (sector circular) *Combinación de sumas y restas de áreas y de perímetros.

-Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.	-Criterios para la igualdad de triángulos.
-Resolución de sistemas de ecuaciones cuadráticas.	-Teorema de las transversales en todas sus partes.
-Resolución de sistemas de ecuaciones fraccionarias.	-Criterios para la semejanza de triángulos. *Proporcionalidad entre los lados. *Proporcionalidad entre las áreas.
-Resolución de ecuaciones con radicales.	-Ángulos, tangentes, arcos y cuerdas en la circunferencia. *Ángulos inscritos y semiinscritos. *Ángulos centrales. (relaciones entre estos ángulos) *Mayor cuerda. *Diámetro o radio perpendicular a una cuerda. *Diámetro o radio por el punto medio de una cuerda. *Tangente a una circunferencia en un punto. *El radio en el punto de tangencia. *Segmentos de tangentes desde un punto exterior a una circunferencia. *Criterio para figuras inscritas. *Teorema de Tales. *Cálculo de la amplitud o de la longitud de un arco.(relación con las cuerdas)
-Resolución de sistemas donde se combinen los distintos tipos de ecuaciones o se puedan aplicar los diferentes procedimientos de resolución estudiados (sustitución, reducción, etc.)	-Grupo de teoremas de Pitágoras. *Teorema de Pitágoras. *Teorema de la altura. *Teorema de los catetos.
	-Polígonos regulares. *Ángulos interiores y ángulos centrales. *Longitud de los lados *Simetría de determinadas figuras planas.

Es importante destacar la utilidad que en este sentido nos brindan los ejercicios de Geometría Plana donde exista en los datos o en los elementos a calcular algún tipo de mayoración o minoración; también en los que aparezcan proporcionalidades entre los mismos. Estos ejercicios nos sugieren de inmediato la posibilidad de establecer variables y de formar ecuaciones sumando o restando la diferencia entre los elementos o establecer los correspondientes cocientes; por lo general en estos ejercicios hay que utilizar otras relaciones o fórmulas que nos permitan hallar nuevas ecuaciones.

La estructura general lógica de trabajo que se presenta en este tipo de ejercicio, se puede apreciar en un esquema que mostramos a continuación y como podrán observar no es exactamente lineal, ya que existe la posibilidad de un ciclo final antes de dar respuesta al ejercicio geométrico. Analizaremos esto con más detalles después que observen el esquema y su flujo.



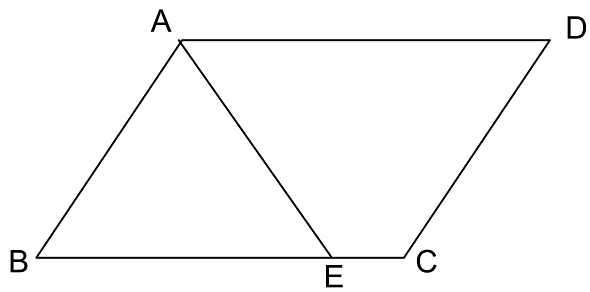
Se observa que siempre partimos de un ejercicio geométrico o problema con texto en el que analizaremos primeramente lo que nos piden, los datos que tenemos, si tenemos o nó la figura o, aun teniéndola, necesitamos hacer alguna construcción auxiliar para poder avanzar en la aplicación de los teoremas, relaciones o propiedades de la Geometría Plana, tal vez realizar demostraciones para poder avanzar en el problema.
Los demás pasos se explican por sí solos; establecer la o las variables y proceder a plantear ecuaciones o sistemas para luego resolverlos y poder hallar los elementos que nos puedan resolver nuestra situación geométrica. El ciclo, en el penúltimo paso, está dado porque pueden aparecer ejercicios que los valores o relaciones que encontremos a partir de la resolución de primeras ecuaciones no nos den la posibilidad de responder, se hace necesario entonces volver al inicio y replantearnos otra nueva situación geométrica y de nuevo transitar por el esquema que estamos explicando.
Destacamos, además, la importancia de trabajar con las fórmulas y utilizarlas en el mayor sentido posible en cuanto al despeje de sus variables; por ejemplo en el caso de la fórmula para el cálculo del área del trapecio, disponemos de una ecuación que presenta cuatro variables: A (área) , B (base mayor) , b (base menor) y h (altura o distancia entre las bases), lo que hace que existan aquí muchas posibilidades de trabajar con relaciones entre las mismas, despejar o de utilizar otras ecuaciones, por ejemplo, el Teorema de Pitágoras para confeccionar nuevos ejercicios integradores de contenidos en los cuales se necesita el empleo del trabajo con variables.
Trabajar declarando variables en estos tipos de ejercicios, nos ofrece la posibilidad de resoluciones más rápidas en el sentido de su escritura, pues es mucho más fácil declarar por la variable x la longitud de un segmento $\overline{AB}$ o la amplitud de un ángulo $\angle$MNP , y entonces proceder a resolver una ecuación o sistemas de ecuaciones, que trabajar considerando todo el tiempo la escritura como $\overline{AB}$ o $\angle$MNP.
Esta experiencia se ha estado aplicando en las teleclases de repaso y de consolidación que se impartieron durante los meses de mayo y junio del 2002 . La manera de realizar las explicaciones animadas por computadora nos resultó de mucha utilidad. Los alumnos se pudieron percatar, mediante la animación y trabajando en forma conjunta con el teleprofesor, de la secuencia de pasos lógicos necesarios en la resolución de cualquier ejercicio de Geometría Plana y en especial en los que se requiera la aplicación del trabajo con variables.
La animación mediante secuencias de diapositivas en PowerPoint se puede aplicar en cualquier centro docente pues en todos existen las computadoras para su preparación y exposición. Con esta técnica se pueden dibujar todas las figuras dadas y realizar todas las construcciones auxiliares necesarias, incluso en colores diferentes para hacerlas más llamativas; se puede programar y realizar la salida en secuencia de todas las variables necesarias con colores diferentes para proponer las ecuaciones que se sugieran y luego resolverlas paso a paso, en espera del trabajo que van realizando los alumnos.

<u>En el ANEXO 1</u> se exponen, como aparecieron por las pantallas de los televisores, 10 ejemplos resueltos que fueron propuestos, resueltos por el teleprofesor y animados por la computadora.

A CONTINUACIÓN SE EXPONEN SIETE EJEMPLOS CLASIFICADOS ATENDIENDO A LAS DIFERENTES ECUACIONES O SISTEMAS DE ECUACIONES QUE NOS PERMITEN TRABAJAR LAS VARIABLES EN SU RESOLUCIÓN.

1-Ecuación lineal

En el paralelogramo ABCD se cumple que $\overline{AE}$ es bisectriz del $\angle$BAD y que el segmento $\overline{BE}$ es 15 cm mayor que $\overline{EC}$. Si el perímetro del paralelogramo es de 90 cm , calcula las longitudes de los lados del paralelogramo.



SOLUCIÓN: Resulta fácil probar que el triángulo ABE es isósceles de base $\overline{AE}$ (bisectriz, ángulos alternos entre las paralelas y propiedad transitiva de la igualdad) entonces los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$ son iguales (se oponen a los ángulos iguales).
Si denotamos $\overline{EC}$ = x , entonces $\overline{BE}$ = x+15 = $\overline{AB}$ y entonces el perímetro de toda la figura se puede expresar por la ecuación 2(x+15) + 2(x+15+x) = 90 que nos conduce, después de realizar las operaciones indicadas y reducir términos semejantes, a la ecuación más simplificada 6 x = 30, por lo que hallamos x = 5.

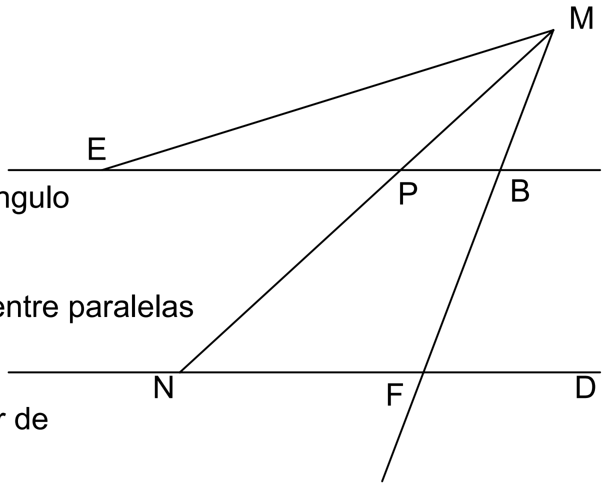
Podemos entonces responder la pregunta que nos hace el ejercicio.

El lado mayor mide 5 + 15 + 5 = 25 cm

El lado menor mide 15 + 5 = 20 cm

2-Sistema de ecuaciones lineales

En la figura, $\overline{EB} \mid\mid \overline{ND}$ y $\overline{NM}$ es bisectriz del $\angle$M. Si $\angle$MEP es 54^o menor que el $\angle$MFD y $\angle$MND=51^o, calcula la amplitud del $\angle$MEP.



SOLUCIÓN:
Consideramos cada una de las mitades del ángulo EMB por y .
Consideramos que el ángulo MEP sea x .
Probamos que $\angle$MPB=51^o (correspondiente entre paralelas con el $\angle$ MND=51^o) .
Podemos escribir $\angle$MFD=x+54^o y entonces plantear, debido a la teoría del ángulo exterior de un triángulo, las ecuaciones siguientes:

$x + y = 51^o$ (en el ΔEPM)

$51^o + y = x + 54^o$ (en el ΔMNF)

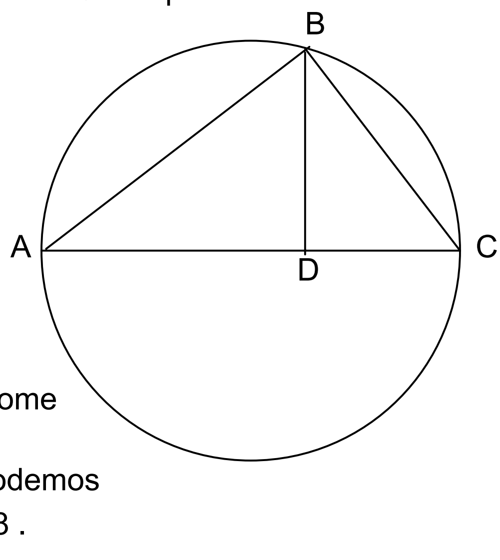
El sistema a resolver puede quedar más simplificado proponiendo

$$x + y = 51^o$$
$$y - x = 3^o$$

Si sumamos ordenadamente las dos ecuaciones obtenemos $2y = 54^o$, por lo que encontramos que $y = 27^o$, entonces $x = 24^o$, lo que responde la pregunta que nos hace el ejercicio.

3-Ecuación cuadrática (construcción auxiliar)

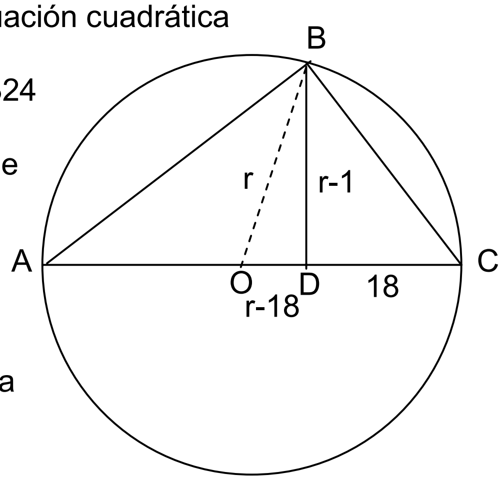
En la figura se ha trazado la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$. El punto B se encuentra en la circunferencia de manera que en el triángulo ABC la altura $\overline{BD}$, relativa al lado $\overline{AC}$, es 1,0 cm menor que el radio de la circunferencia.
La distancia que separa al punto D del punto C es de 18 cm.
Calcula el radio de la circunferencia.



SOLUCION: Consideremos que el centro de la circunferencia es el punto O y entonces trazamos el radio r . Podemos así trabajar en el triángulo rectángulo OBD proponiendo que el segmento $\overline{BD}$ tome la expresión r – 1.
Como que el segmento $\overline{DC}$ mide 18 cm entonces podemos poner que el segmento $\overline{OD}$ toma la expresión r – 18 .

Aplicamos el teorema de Pitágoras y llegamos a la ecuación cuadrática

$r^2 = (r-1)^2 + (r-18)^2 \;\rightarrow\; r^2 = r^2 - 2r + 1 + r^2 - 36r + 324$



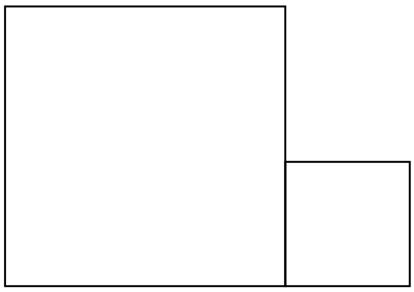
Obtenemos entonces la ecuación $r^2 - 38r + 325 = 0$ que se descompone en factores por $(r-25)(r-13) = 0$.

La única posibilidad es r = 25 cm.

Se puede aplicar otra vía probando que el triángulo ABC es rectángulo en B (Tales) y aplicando el Teorema de la altura. $(r-1)^2 = 18(2r-18)$

4-Sistema con una ecuación lineal y la otra cuadrática.

En la figura se muestran dos cuadrados unidos. El perímetro de toda la figura es de 44 cm y su área es de 97 cm^2 . Calcula el perímetro y el área de cada cuadrado.



SOLUCIÓN: Consideremos que el lado del cuadrado mayor es x , tomamos entonces para el lado del cuadrado menor la variable y .
La suma de las dos áreas puede escribirse por la ecuación que parte del área de cada cuadrado mediante $x^2 + y^2 = 97$.
La otra ecuación la obtenemos analizando el perímetro de toda la figura $4x + 2y = 44$ que se puede simplificar y llegar a $2x + y = 22$.
Podemos despejar la variable $y = 22 - 2x$, sustituir en la ecuación cuadrática y realizar los siguientes pasos:

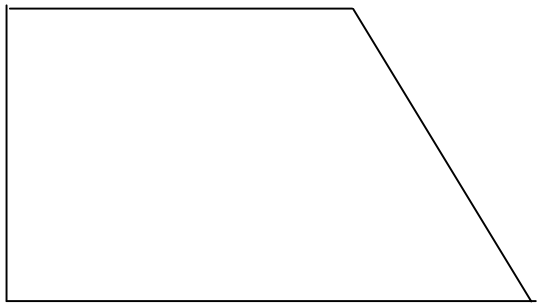
$$x^2 + (22-2x)^2 = 97 \;\rightarrow\; x^2 + 484 - 88x + 4x^2 - 97 = 0$$

$$\rightarrow 5x^2 - 88x + 387 = 0 \;\rightarrow\; (x-9).(5x-43) = 0 \;\rightarrow\; x = 9 \text{ ó } x = \frac{43}{5}$$

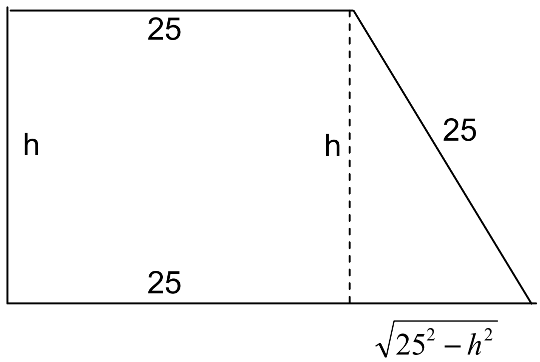
Con x = 9 cm podemos calcular fácilmente que y = 4 cm. Procedemos a responder las preguntas que nos hace el ejercicio. El área de cada cuadrado 81cm^2 y 16cm^2.
El perímetro de cada cuadrado 36cm y 16cm . Resulta interesante analizar si es posible la respuesta $x = \frac{43}{5}$ de la cual aún no hemos dado ningún criterio.

5-Ecuación con radicales   (hay que hacer una construcción auxiliar)

La figura representa un trapecio rectángulo con 106 cm de perímetro donde la base menor y el lado oblicuo son iguales y tienen una longitud de 25 cm. Calcula el área del trapecio.



SOLUCIÓN: Trazamos la construcción auxiliar que representa la altura h con línea discontinua y obtenemos un triángulo rectángulo.



Podemos entonces, aplicando proyección y el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se forma a la derecha, decidir que la base mayor se puede descomponer en $25 + \sqrt{25^2 - h^2}$ y entonces, como conocemos el perímetro, plantear la ecuación con radicales: $106 = 75 + h + \sqrt{25^2 - h^2}$

$31 - h = \sqrt{25^2 - h^2}$ $\rightarrow$ $(31 - h)^2 = 25^2 - h^2$

que al elevar ambos miembros al cuadrado, operar, reducir términos semejantes y ordenar llegamos la ecuación $h^2 - 31h + 168 = 0$ que se descompone en factores mediante $(h-24).(h-7)=0$ y nos entrega las posibles soluciones h=24cm y h=7cm.

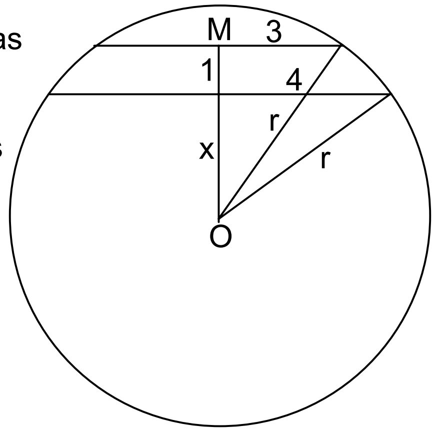
Con h=24 podemos encontrar que la base mayor B=32cm y entonces se puede calcular el área del trapecio mediante la fórmula: $A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{32+25}{2} \cdot 24 = 57.12 = 684 cm^2$.

Resulta de interés trabajar también con la solución h=7cm pues nos conduce a otra modelación del ejercicio y a otra área.

6-Sistema de dos ecuaciones cuadráticas. (no nos dan el gráfico)

En una circunferencia de centro O la distancia entre dos cuerdas paralelas es de 1,0 cm. Si las cuerdas miden 8,0 cm y 6,0 cm , calcula el radio de la circunferencia.

SOLUCIÓN: Hacemos un esbozo del gráfico que nos sugiere el ejercicio.



Trazamos el segmento $\overline{OM}$ perpendicular a las dos cuerdas y entonces ambas quedan divididas en sus mitades.
Se forman dos triángulos rectángulos con hipotenusas que Consideramos como r (radio) . Podemos aplicar dos veces el Teorema de Pitágoras y obtener las ecuaciones

$$r^2 = x^2 + 4^2 \qquad y \qquad r^2 = (x + 1)^2 + 3^2$$

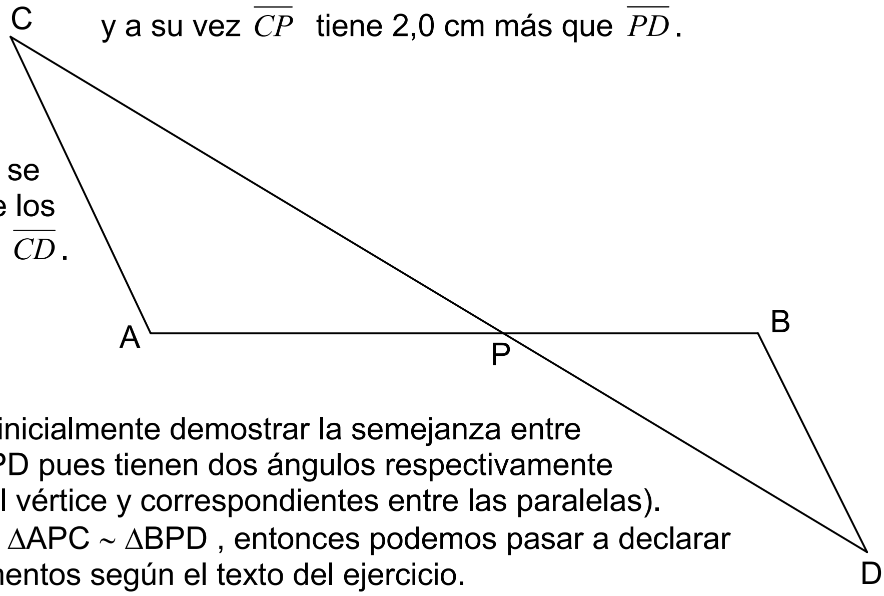
que si las igualamos por r^2 obtenemos la ecuación

$$x^2 + 16 = x^2 + 2x + 1 + 9$$

que nos conduce a la ecuación lineal $2x = 6$ para concluir que $x = 3$ y calcular que $r = 5$ cm.

7-Ecuaciones fraccionarias.

En la figura se cumple que $\overline{CA} \mid\mid \overline{BD}$ y conocemos que $\overline{AB} = 7{,}0cm$.
Además, el segmento $\overline{AP}$ tiene la mitad de la longitud del segmento $\overline{CP}$ y a su vez $\overline{CP}$ tiene 2,0 cm más que $\overline{PD}$.



Calcula a qué distancia se encuentra el punto P de los extremos del segmento $\overline{CD}$.

SOLUCIÓN: Podemos inicialmente demostrar la semejanza entre los triángulos APC y BPD pues tienen dos ángulos respectivamente iguales (opuestos por el vértice y correspondientes entre las paralelas).
O sea, ya tenemos que $\Delta APC \sim \Delta BPD$, entonces podemos pasar a declarar variables para los segmentos según el texto del ejercicio.

Consideremos que $\overline{PD}$=x , entonces, $\overline{CP}$=x+2 y $\overline{AP} = \frac{x+2}{2}$ por lo que podemos escribir

que el segmento $\overline{PB} = 7 - \frac{x+2}{2} = \frac{14-x-2}{2}$. Trabajando ahora con los segmentos

proporcionales podemos plantear una buena ecuación fraccionaria $\frac{x+2}{x} = \frac{\frac{x+2}{2}}{\frac{12-x}{2}}$ donde

podemos realizar algunas simplificaciones importantes y obtener una ecuación mucho más sencilla $\frac{1}{x} = \frac{1}{12-x}$ y escribimos directamente $x = 12 - x$ que admite la única solución x=6 . Podemos calcular los segmentos y responder que el punto P se encuentra a 6,0 cm del punto D y a 8,0 cm del punto C.

(Este ejercicio se pudo realizar también proponiendo otras ecuaciones planteando proporciones diferentes)

Como se aprecia en todo el contenido de esta experiencia no hemos hecho referencia alguna al uso de la trigonometría. Consideramos que hacerlo nos llevaría a tener que cambiar el título del trabajo y tener que aplicar muchas más variantes en los datos y relaciones, tal vez pudiera ser el título para un nuevo trabajo, pues la trigonometría nos proporciona también muchas posibilidades para obtener nuevas ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

El docente debe prepararse para confeccionar ejercicios que presenten las características que hemos estado abordando, no resulta una tarea muy difícil, pero llamamos la atención en el sentido de que cualquier ejercicio que se elabore, en principio debe existir, y a la vez se debe lograr una buena modelación en los datos. No se debe intentar nunca forzar un ejercicio para satisfacer el uso de variables pues podemos caer en un absurdo formalismo o en proponer un ejercicio que en la realidad no tiene solución.

En el ANEXO 2 se proponen 20 ejercicios de Geometría Plana, con su gráfico correspondiente, en los que se hace necesario el uso de variables y la resolución con cualquiera de las estructuras que hemos explicado en los ejemplos resueltos.

En el ANEXO 3 se proponen 60 ejercicios de Geometría Plana que no presentan el gráfico y por tanto se requiere de un mayor poder de análisis y de la realización de una modelación con mayor profundidad para llegar a establecer el uso de variables en su resolución.

CONCLUSIONES

1- Los ejercicios integradores de contenidos de Geometría Plana, en los cuales se necesita de la aplicación del trabajo con variables para su resolución, son de extraordinario valor para el desarrollo del pensamiento lógico de nuestros educandos.

2- Se pueden proponer estos tipos de ejercicios a nuestros alumnos en la medida en que se van impartiendo los contenidos correspondientes al álgebra (utilizando la Geometría Plana como apoyo para la aplicación intramatemática) o en la medida en que se van impartiendo los contenidos de Geometría Plana (utilizando el álgebra como posibilidad de resolución y de aplicación intramatemática).

3- Es incalculable la variedad de situaciones Geométricas en las cuales se necesita del uso del Trabajo con Variables (álgebra) para proponernos una o las posibles vías de resolución y en este sentido valorar que siempre nos conducen al mismo resultado, aunque de inicio al alumno no le parezca posible.

4- El uso de la computación como medio de enseñanza es algo que ya está más que probado y aquí solamente destacamos la importancia de su empleo, mediante el trabajo con el PowerPoint, en la explicación y animación de los ejercicios de Geometría Plana, en especial en aquellos en que se necesita la utilización del Trabajo con Variables en su resolución.

5- La aplicación de la Computadora en las teleclases de Matemática, valiéndonos de la explotación del PowerPoint, ofrece muy buenos resultados en el orden técnico-metodológico y también en el grado de asimilación de los contenidos por parte de los alumnos.

6- En el plano de la atención a las diferencias individuales de nuestros alumnos, por ejemplo: cuando un alumno necesita eliminar dificultades que presenta en situaciones relacionadas con la factorización de expresiones algebraicas, se le pueden proponer ejercicios de Geometría que le lleven directamente a la situación diagnosticada y viceversa.

7- Es de incalculable importancia para la formación de nuestros educandos el desarrollar el Pensamiento Algebraico en la Geometría y el pensamiento Geométrico dentro del Álgebra.

8- Crear ejercicios de Geometría Plana, en los que se necesite el uso de variables para abordar su resolución, es una tarea fácil y que solo requiere de la creatividad y de la preparación de los docentes.

BIBLIOGRAFIA

BALDOR, A.:Algebra elemental, 16 ed., Imprenta Nacional de Cuba, La Habana.

CAMPISTROUS P. L. ET. Al: Matemática 10mo grado, Ed. Pueblo y Educación, 338 pp., Ciudad de La Habana.,1989.

-------------:Matemática 11no grado, Ed. Pueblo y Educación , 416 pp.,Ciudad de La Habana, 1990.

-------------:Matemática 12do grado, Ed. Pueblo y Educación, (Partes I y II), Ciudad de La Habana,1991.

GONZALEZ M. O.: Álgebra elemental moderna, en M. O. González y J. D. Mancill, ed. 5 . 2t , Ed. Pedagógica, 1967.

GÜNTER p. ET. Al.: Conferencia sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 3, 302 pp. , Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1982.

JUNGK , W.: Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 1 ,199 pp. , Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1979.

MUÑOZ B. F.: Problemas de Matemática elemental : 10 y 11 grados, 178 pp. , en F. Muñoz y L. Campistrous, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1964.

MUÑOZ B. F. ET. Al: Matemática 7mo grado, 206 pp. Ed. Pueblo y Educación, La Habana,1989.

----------------- : Matemática 8vo grado , 213 pp. Ed. Pueblo y Educación , La Habana , 1989

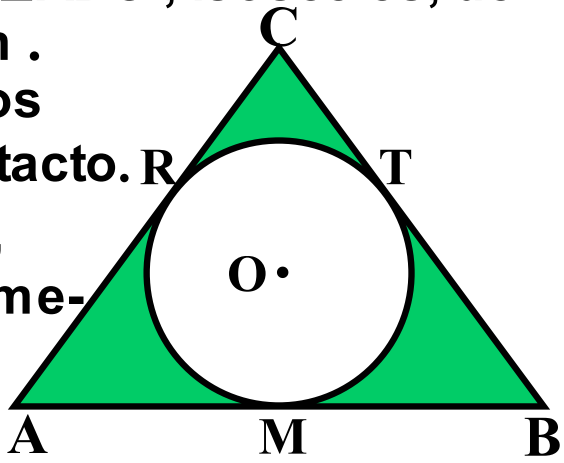
----------------- : Matemática 9no. Grado, 286 pp., Ed. Pueblo y Educación , La Habana, 1989.

ANEXO 1

A CONTINUACIÓN SE EXPONEN 10 EJEMPLOS DE EJERCICIOS QUE FUERON PROPUESTOS EN LAS TELECLASES Y LA MANERA QUE FUERON RESUELTOS Y ANIMADOS EN LA COMPUTADORA.

EJEMPLO 1

El círculo de centro O se encuentra inscrito en el ΔABC , isósceles, de base $\overline{AB}$=1,2 m . R, T y M son los puntos de contacto. Si $\overline{CT}$=4,0 dm , calcula el períme-tro del círculo y el área de la región sombreada.

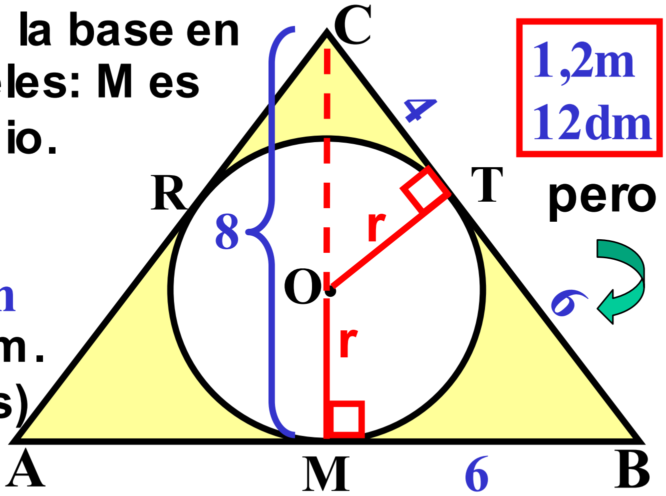


Debemos calcular el radio del círculo. ¿El mejor lugar para trazarlo? $\overline{CM}$ es bisectriz del $\angle$C y altura con respecto a la base en el Δ isósceles: M es punto medio.

$\overline{CB}$=10dm

$\overline{CM}$=8,0dm

(trío de núm. pitagóricos)

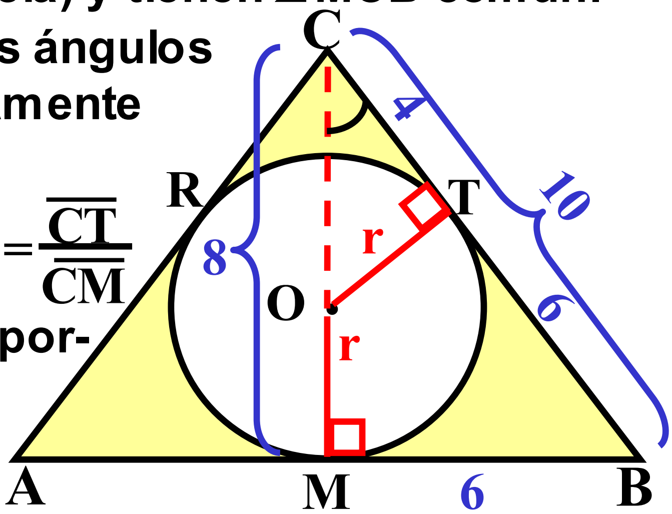


Podemos afirmar que $\Delta MBC \sim \Delta OTC$ pues ambos son rectángulos (puntos de tangencia) y tienen $\angle MCB$ común.

Tienen dos ángulos respectivamente iguales.

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{OT}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{CT}}{\overline{CM}}$$

Lados proporcionales.



$$\frac{\overline{CO}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{OT}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{CT}}{\overline{CM}}$$ donde $$\frac{\overline{CO}}{10}=\frac{r}{6}=\frac{4}{8}$$

La r como variable

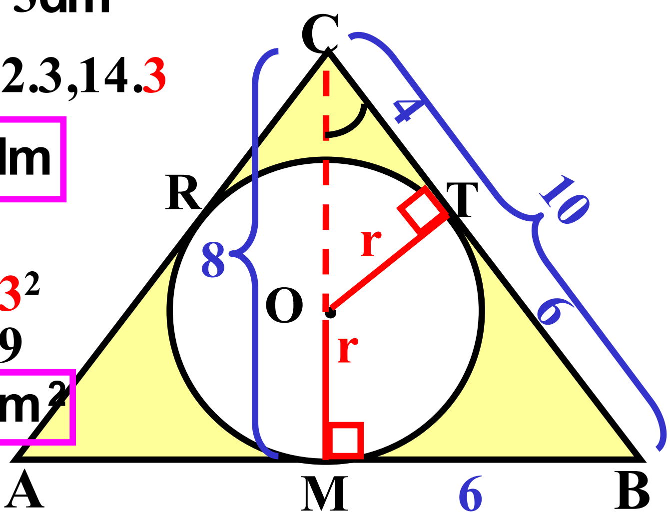
$$r=\frac{6\,.\,4}{8}=3\text{dm}$$

$P_{\odot}=2\pi r=2.3{,}14.3$

$\boxed{P_{\odot}=18{,}8\text{dm}}$

$A_{\odot}=\pi.r^2$
$=3{,}14.3^2$
$=3{,}14.9$

$\boxed{A_{\odot}=28{,}3\text{dm}^2}$



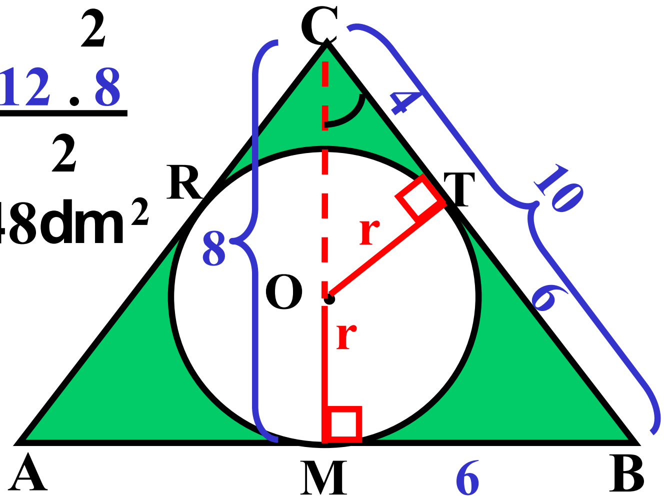
$A = A_{\Delta ABC} - A_{\odot} = 48 - 18{,}3$

$\boxed{A = 19{,}7 dm^2}$

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{\overline{AB}.\overline{CM}}{2}$

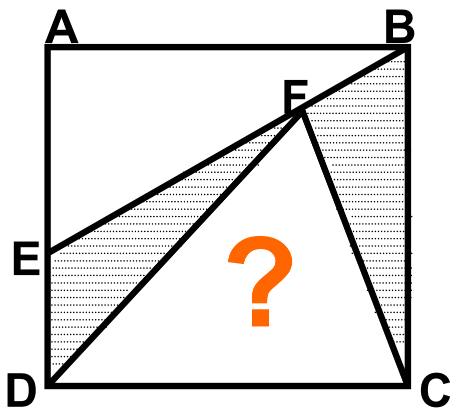
$A_{\Delta ABC} = \dfrac{12\ .\ 8}{2}$

$A_{\Delta ABC} = 48 dm^2$



EJEMPLO 2

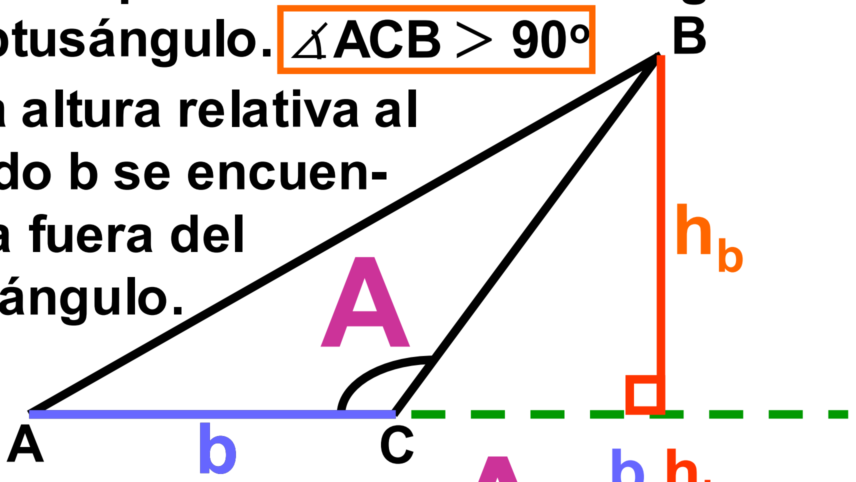
En la figura se representa un cuadrado ABCD de 13cm de lado donde $\overline{ED}$=5,0cm. El punto F está sobre el segmento $\overline{EB}$ de manera que los triángulos EDF y FBC tienen igual área. Calcula el área del triángulo DCF



REACTIVACIÓN IMPLÍCITA

Una especial atención al triángulo obtusángulo. $\boxed{\measuredangle ACB > 90^{o}}$

La altura relativa al lado b se encuentra fuera del triángulo.



$$A = \frac{b.h_b}{2}$$

Trazamos $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ y obtenemos los segmentos MF y FN donde se cumple que $\overline{MF} \perp \overline{AD}$ y $\overline{FN} \perp \overline{BC}$.

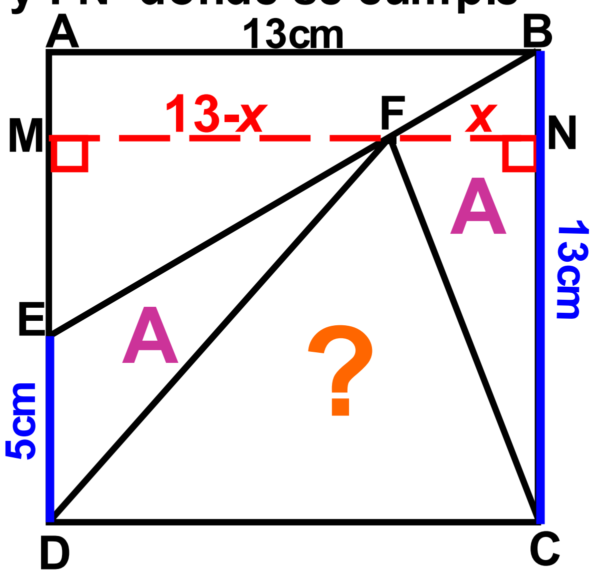
$$A_{EDF} = A_{FBC}$$

$$\frac{\overline{ED}.\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{BC}.\overline{FN}}{2}$$

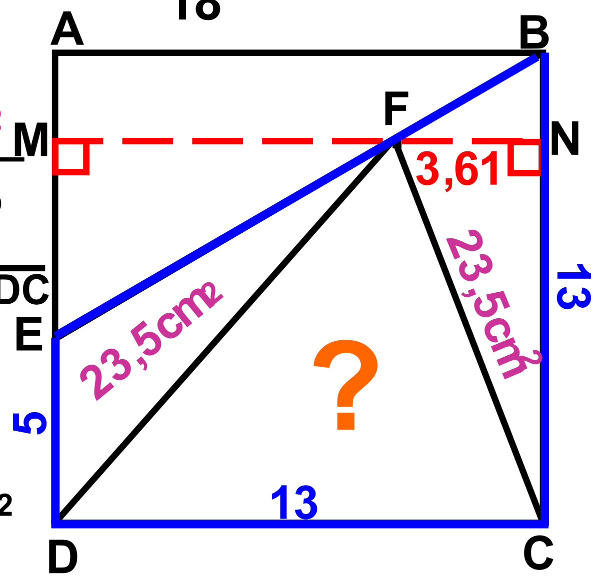
$$\frac{5.(13-x)}{\cancel{2}} = \frac{13.x}{\cancel{2}}$$

$$65-5x=13x$$

$$65=13x+5x$$



$65=18x$,o sea, $x=\frac{65}{18}=3{,}61\text{cm}$



$A_{FBC}=\frac{13.3{,}61}{2}$

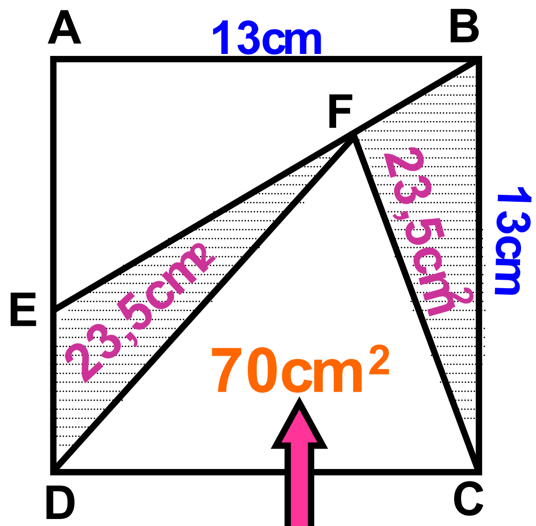
$A_{FBC}=23{,}5\text{cm}^2$

A del trapecio

$A_{DCBE}=\frac{\overline{BC}+\overline{ED}}{2}.\overline{DC}$

$A_{DCBE}=\frac{13+5}{2}.13$

$A_{DCBE}=117\text{cm}^2$

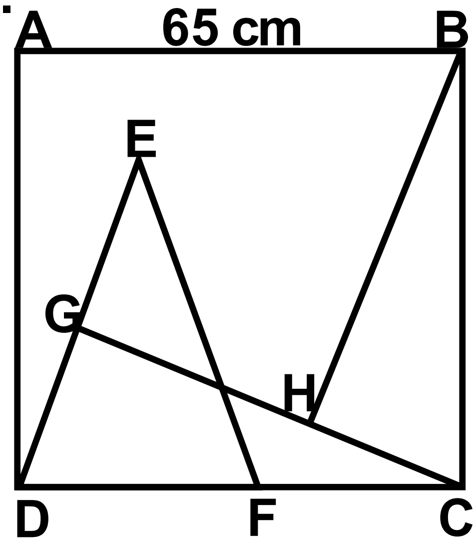


Resta de áreas

$A_{DFC}=A_{DCBE}-2.A_{\Delta EDF}$

$A_{DFC}=117-2.23{,}5=117-47=70\text{cm}^2$

EJEMPLO 3 ABCD es un cuadrado con ΔBHC rectángulo en H y ΔDGC lo es en G. ΔDFE isósceles de base $\overline{DF}$ con G punto medio de $\overline{DE}$. La longitud de $\overline{HB}$ es 35cm mayor que la de $\overline{HC}$. Calcula el área del ΔDFE.



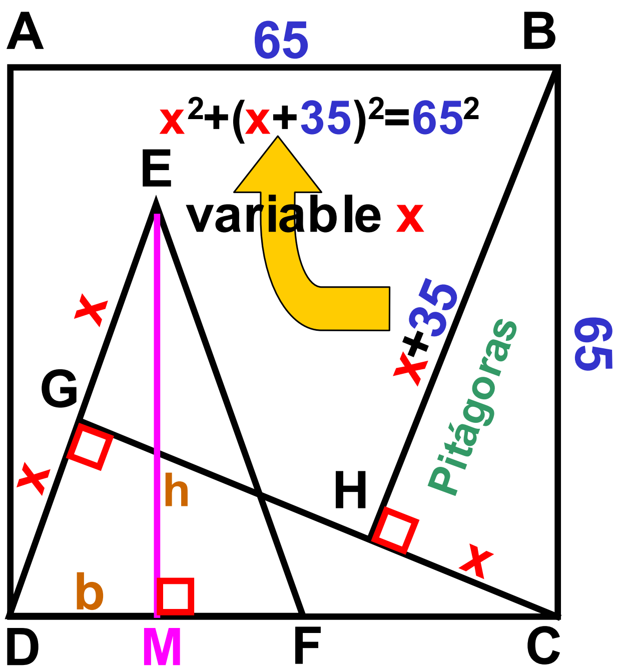
Probar: $\Delta BHC = \Delta DGC$

Probar: $\Delta DGC \sim \Delta DME$

Analizar: $\overline{DE} = 2.x$

Establecer la proporcionalidad entre los lados.

Calcular: $\overline{DM}$ y $\overline{EM}$



$x^2+x^2+70x+35^2-65^2=0$

$2x^2+70x-3000=0$

$x^2+35x-1500=0$

$(x+60).(x-25)=0$

$x=-60$ ó $\boxed{x=25}$

Entonces

$\overline{DE}=2.x=2.25=50cm$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EM}}{\overline{GC}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{DG}}$$

$$\frac{50}{65}=\frac{b}{60}=\frac{h}{25}$$

Calculamos

$$b=\frac{50.60}{65}=46,2cm$$

$$h=\frac{50.25}{65}=19,2cm$$

$$A_{\Delta DFE}=\frac{\cancel{2}.b.h}{\cancel{2}}$$

$A_{\Delta DFE}=46,2.19,2$

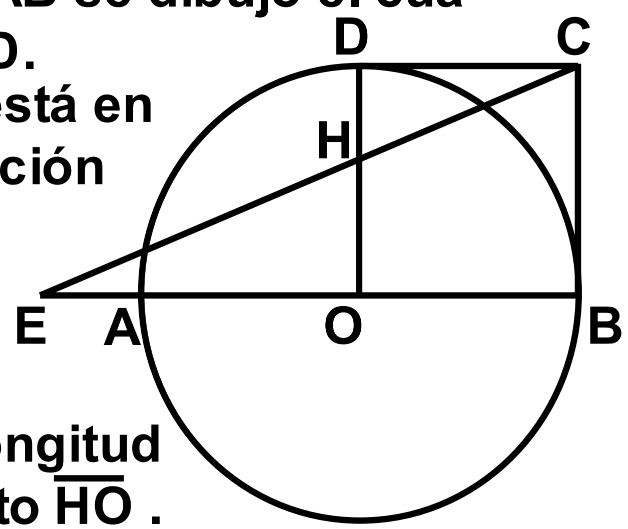
$\boxed{A_{\Delta DFE}=887cm^2}$

EJEMPLO 4

En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ se dibujó el cuadrado OBCD.

El punto E está en la prolongación de $\overline{AB}$ con $\overline{EA}=4,0cm$ y $\overline{EC}=26cm$

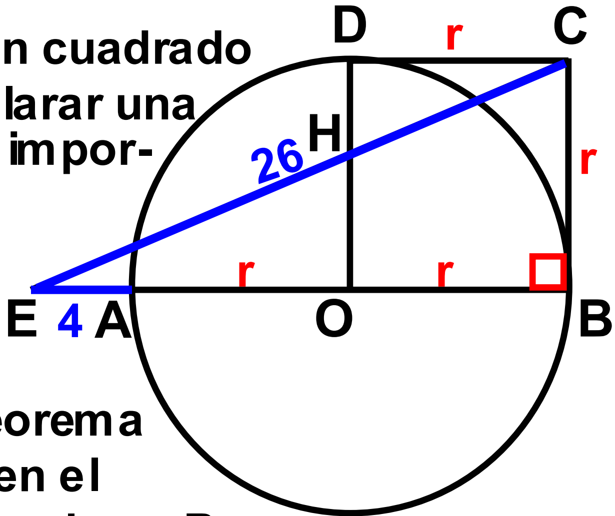
Calcula la longitud del segmento $\overline{HO}$.



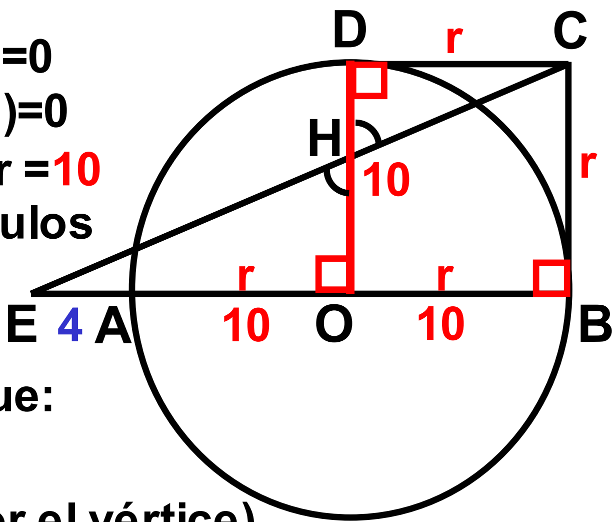
Si OBCD es un cuadrado podemos declarar una variable muy importante: r .

Y los datos numéricos: 26 y 4 .

Aplicamos Teorema de Pitágoras en el $\triangle$EBC, rectángulo en B



$26^2=r^2+(2r+4)^2$ y podemos llegar a la ecuación cuadrática $5r^2+16r-660=0$



$5r^2+16r-660=0$

$(5r+66).(r-10)=0$

Únicamente r =10

En los triángulos rectángulos EOH y HDC se cumple que:

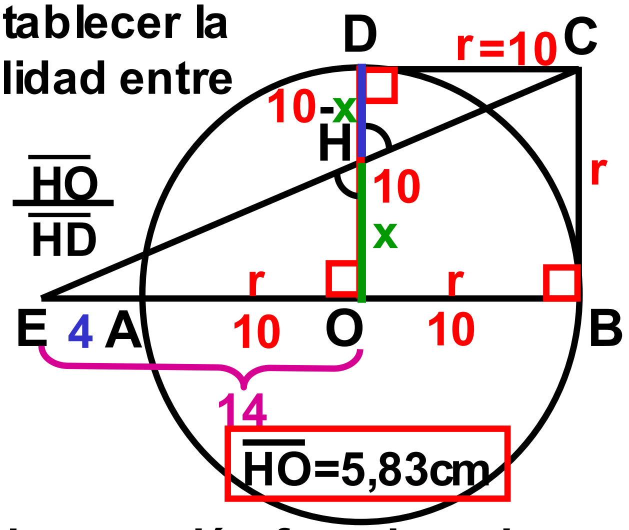
$\angle EHO=\angle DHC$

(opuestos por el vértice)

Entonces $\triangle EOH \sim \triangle HDC$ (por tener dos ángulos respectivamente iguales)

Podemos establecer la proporcionalidad entre los lados

$$\frac{\overline{EO}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{HO}}{\overline{HD}}$$



Declaramos una nueva variable: x

$$\frac{14}{10} = \frac{x}{10-x}$$

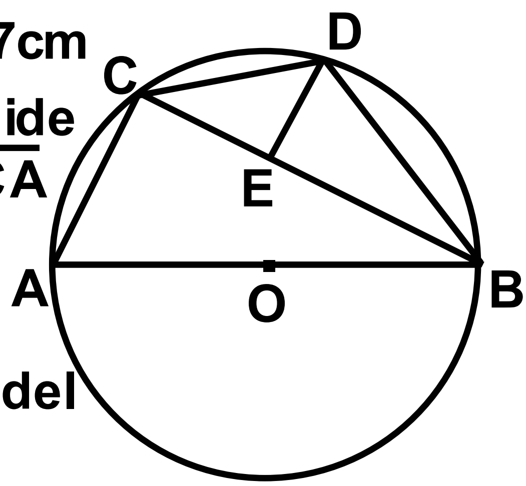
Resolvemos la ecuación fraccionaria,

$14(10-x)=10x$ y obtenemos $140-14x=10x$

$140=24x$ donde $x=140:24=5{,}83$cm

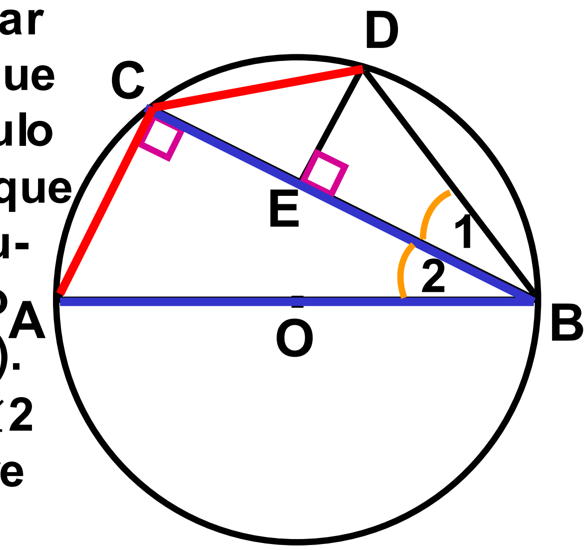
EJEMPLO 5

En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$=17cm la cuerda $\overline{CB}$ mide 15cm y $\overline{DE} \parallel \overline{CA}$ con $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD}$.



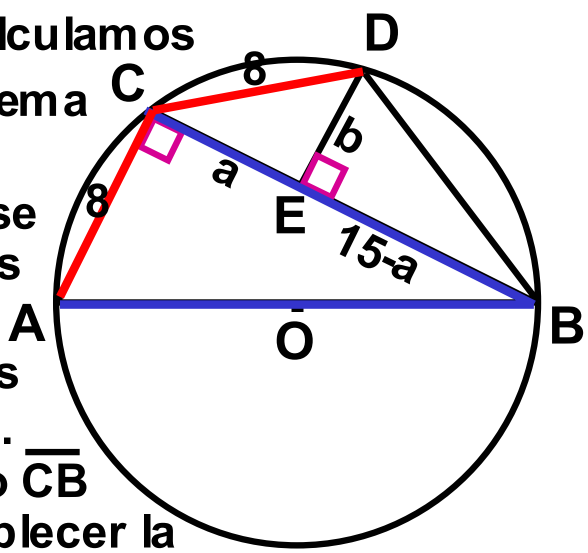
Calcula el área del triángulo CBD .

Se puede probar con facilidad que ΔABC rectángulo en C (Tales) y que ΔBDE rectángulo en E (debido a las paralelas).
Además, $\angle 1 = \angle 2$ (inscritos sobre arcos iguales).



Entonces $\Delta ABC \sim \Delta BED$ (tienen dos ángulos respectivamente iguales).

En el ΔABC calculamos $\overline{AC}$=8cm (Teorema de Pitágoras)
$\overline{CD}=\overline{AC}$=8cm (se oponen a arcos iguales)
Declaramos las variables a y b.
Sobre el cateto $\overline{CB}$ podemos establecer la relación a ; 15-a y entonces hallar relaciones que enlacen estos segmentos.



$a^2+b^2=8^2$ (T. de Pitágoras)

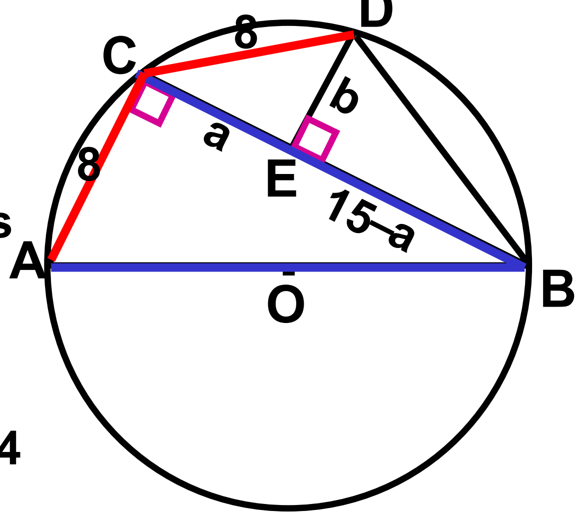
$\frac{b}{8}=\frac{15-a}{15}$ (segmentos proporcionales)

Despejamos b

$$b=\frac{120-8a}{15}$$

y la sustituimos en la ecuación de Pitágoras.

$$a^2+\left(\frac{120-8a}{15}\right)^2=64$$



$a^2+\left(\frac{120-8a}{15}\right)^2-64=0$ que a simple vista nos parece complicada pero trabajando con calma y operando bien nos conduce a la ecuación:

$$225a^2+\cancel{14400}-1920a+64a^2-\cancel{14400}=0$$

$$289a^2-1920a=0 \Rightarrow a\,(289a-1920)=0$$

$\boxed{a=0 \text{ imp.}}$ ó $a=\frac{1920}{289}=6{,}64\text{cm}$

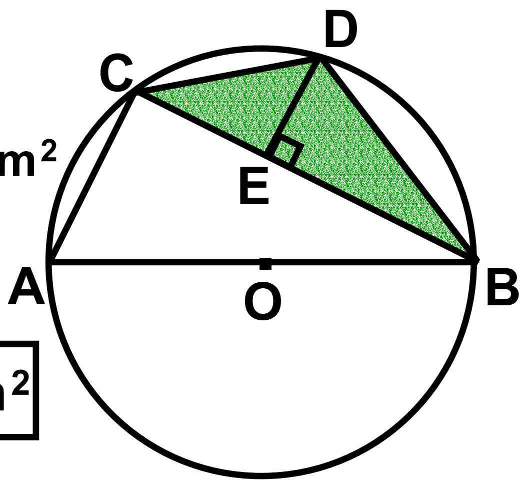
y ahora podemos calcular b en

$$b=\frac{120-8a}{15}=\frac{120-8.6{,}64}{15}=4{,}46\text{cm}$$

Ya tenemos los elementos necesarios para calcular el área del ΔCBD.

$$A_{\Delta CBD}=\frac{\overline{CB}.\overline{ED}}{2}$$

$$=\frac{15.4,46}{2}= 33,45\ cm^2$$



$$\boxed{A_{\Delta CBD}=0,33\ dm^2}$$

EJEMPLO 6

Un rombo tiene 68 cm de perímetro y la longitud de la diagonal menor supera en 1,0 cm a la mitad de la longitud de la mayor.

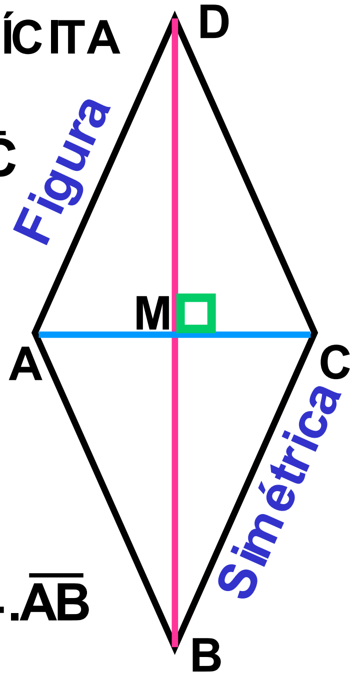
Calcula el área de este rombo.

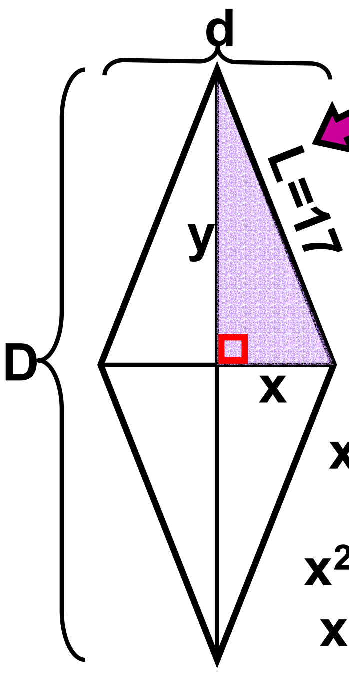
REACTIVACIÓN IMPLÍCITA

-Paralelogramo

- $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ - $\overline{AB} = \overline{BC}$
- 4 triángulos rectángulos iguales.
- $\overline{DB}$ bisectriz de $\angle D$ y $\angle B$.
- $\overline{AC}$ bisectriz de $\angle A$ y $\angle C$.

$$A = \frac{\overline{DB}.\overline{AC}}{2} \qquad P = 4.\overline{AB}$$





$$L = \frac{P}{4} = \frac{68}{4} = 17\text{cm}$$

$$d > \frac{D}{2} \Rightarrow d-1 = \frac{D}{2}$$

$$2x-1 = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}}$$

$$2x-1 = y$$

$x^2+y^2=17^2$ (Teorema de Pitágoras)

$$x^2+(2x-1)^2=289$$

$$x^2+4x^2-4x+1-289=0$$

$$5x^2-4x-288=0 \quad \begin{cases} D=b^2-4ac \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

$$(x-8).(5x+36)=0$$

$$\boxed{x=8} \quad \text{ó} \quad x=-36:5$$

y podemos calcular en $y=2x-1$

$$y=2.8-1$$

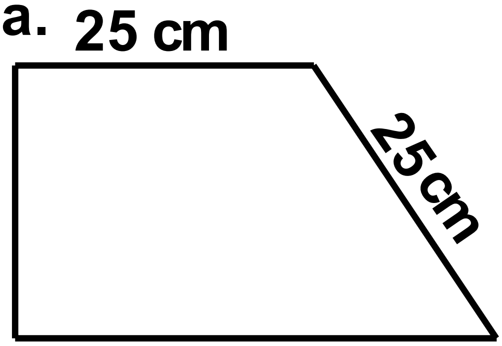
$$\boxed{y=15}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D=2.y=2.15=30cm \\ d=2.x=2.8=16cm \end{array}}$$

$$A=\frac{D.d}{2}=\frac{30.16}{2}=240cm^2=2,4dm^2$$

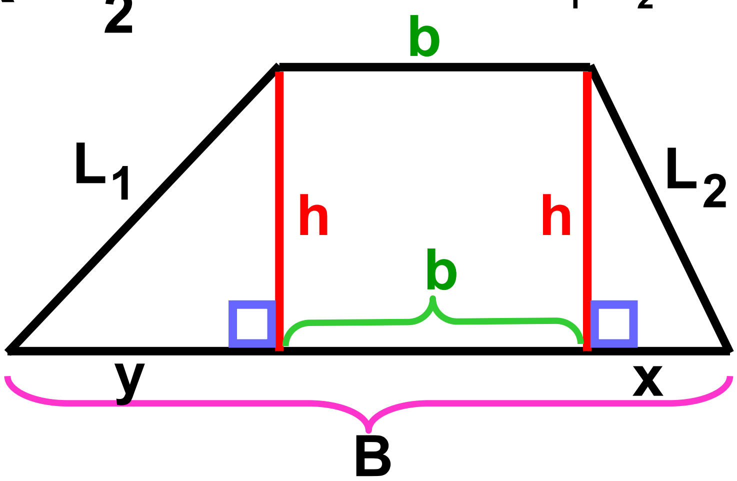
EJEMPLO 7

La figura representa un trapecio rectángulo con 106 cm de perímetro.
Calcula su área.



REACTIVACIÓN IMPLÍCITA

$A=\frac{B+b}{2}\cdot h$ $\quad$ $P=L_1+L_2+B+b$



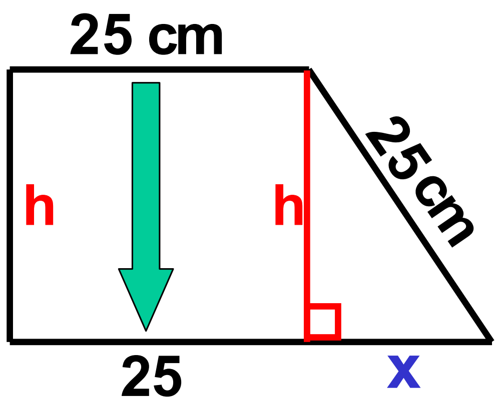
P=106 cm

$106=75+h+x$

$\boxed{h+x=31}$

$\boxed{x^2+h^2=25^2}$

Teorema de Pitágoras



$x=31-h \Rightarrow (31-h)^2+h^2=625$

$\Rightarrow 961-62h+h^2+h^2-625=0$

$\Rightarrow 2h^2-62h+336=0 \Rightarrow h^2-31h+168=0$

$h^2-31h+168=0$

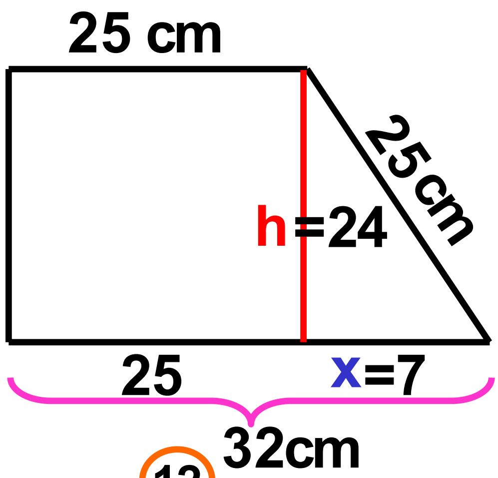
$(h-24).(h-7)=0$

$\boxed{h=24}$ ó $h=7$

Con $h=24$ cm

$x=31-h$

$x=31-24=7$cm



$$A=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{32+25}{\cancel{2}}\cdot \overset{12}{\cancel{24}}=57.12$$

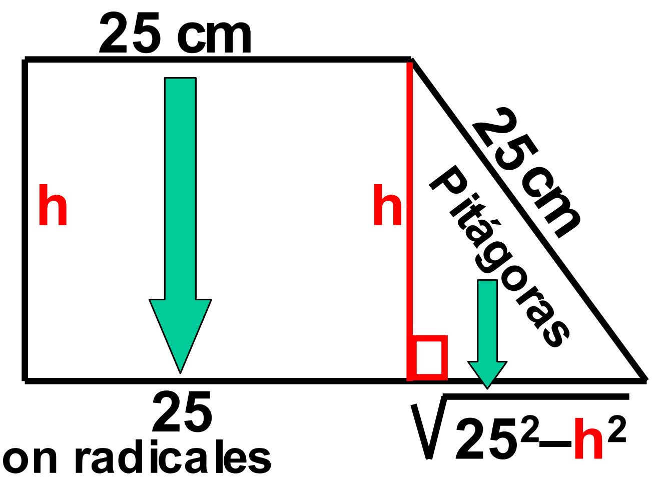
$\boxed{A=684\ cm^2}$

Resulta interesante ver el caso $h=7$.

<u>OTRA VÍA</u>

P=106

Una sola variable: h



Ecuación con radicales

$106=75+h+\sqrt{25^2-h^2}$

$31-h=\sqrt{25^2-h^2}$

$(31-h)^2=625-h^2$

$(31-h)^2+h^2=625$

Igual ecuación

EJEMPLO 8

En un triángulo isósceles ABC, con perímetro de 80cm, la altura relativa a su base $\overline{AB}$ tiene una longitud de 20cm.

Calcula el área del ΔABC.

P=80 cm **h=20 cm**

M punto medio ($\overline{CM}$ altura relativa a la base en el Δ isósceles)

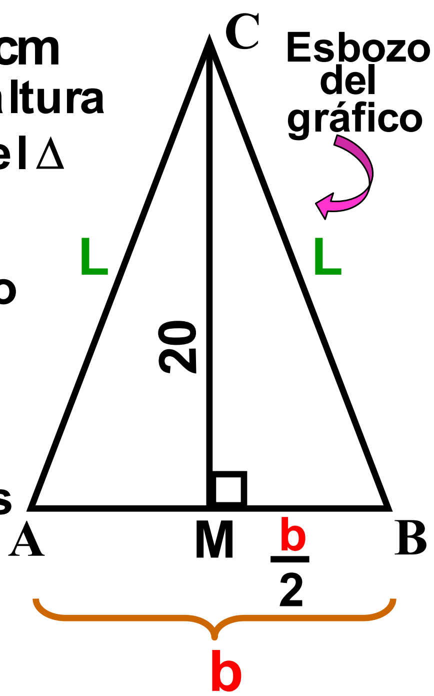
$\boxed{2L+b=80}$ **Perímetro**

$$\boxed{L^2=20^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Teorema de Pitágoras

Despejamos b en la primera ecuación

$$b=80-2L$$



Sustituimos en la ecuación de Pitágoras

$$L^2=20^2+\left(\frac{80-2L}{2}\right)^2$$

$$L^2=400+(40-L)^2$$

$$\cancel{L^2}=400+400-80L+\cancel{L^2}$$

$$80L=800 \Rightarrow L=10cm$$

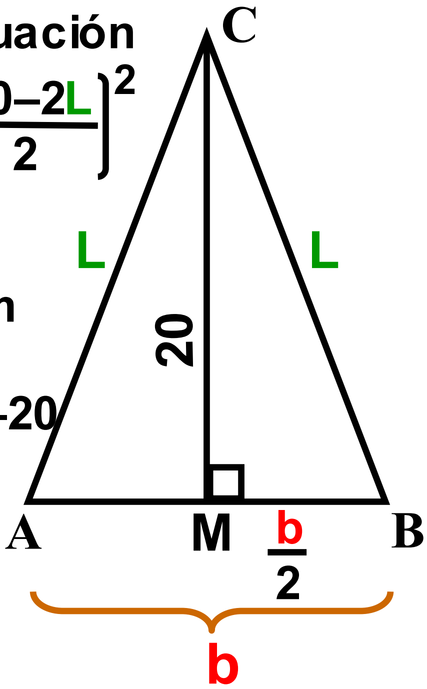
Calculamos b en

$$b=80-2L=80-2.10=80-20$$

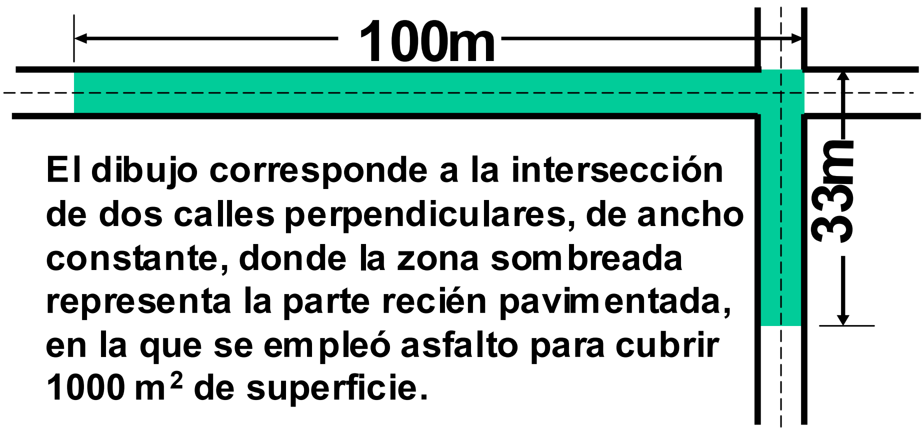
$$b=60cm$$

$$A_\Delta=\frac{b.h}{2}=\frac{60.20}{2}=600$$

$$\boxed{A_\Delta=6{,}0\ dm^2}$$

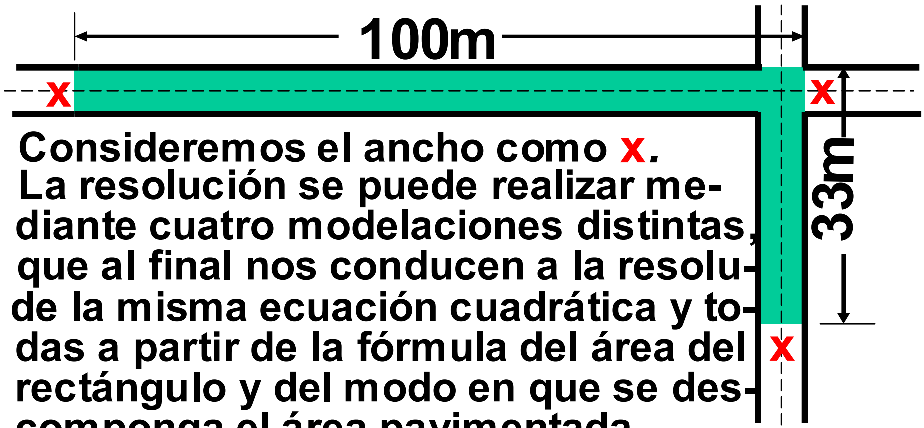


EJEMPLO 9



El dibujo corresponde a la intersección de dos calles perpendiculares, de ancho constante, donde la zona sombreada representa la parte recién pavimentada, en la que se empleó asfalto para cubrir 1000 m^2 de superficie.

Necesitamos conocer el ancho de las calles sin tener que acudir a pie de obra para proceder a medirlas.



Consideremos el ancho como x.
La resolución se puede realizar mediante cuatro modelaciones distintas, que al final nos conducen a la resolu- de la misma ecuación cuadrática y todas a partir de la fórmula del área del rectángulo y del modo en que se descomponga el área pavimentada.

$\rightarrow 1000=100x+(33-x)x$
$\rightarrow 1000=(100-x)x+x^2+(33-x)x$
$\rightarrow 1000=(100-x)x+33x$
$\rightarrow 1000=100x+33x-x^2$

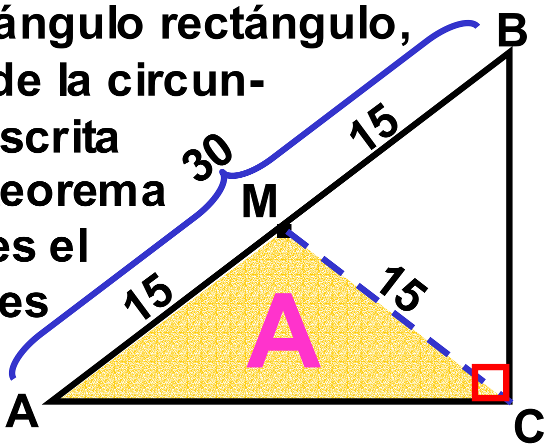
$x^2-133x+1000=0$
$(x-8).(x-125)=0$
$\boxed{x=8}$ ó $x=125$ imp.
El ancho 8,0 m

EJEMPLO 10

En un triángulo rectángulo ABC la longitud del cateto $\overline{AC}$ excede en 6,0 cm a la del otro y la mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AB}$ mide 15 cm.
Calcula el área del $\triangle$AMC que forma la mediana con el cateto $\overline{AC}$ y la hipotenusa.

Haremos una modelación de la situa-
que nos presenta el ejercicio mediante
un esbozo del gráfico y los datos.
$\overline{CM}$ es la mediana relativa a la hipo-
tenusa en el triángulo rectángulo,
M es el centro de la circun-
ferencia circunscrita
(recíproco del teorema
de Tales), $\overline{AB}$ es el
diámetro y $\overline{MC}$ es
el radio.

$\overline{AB}$=30cm

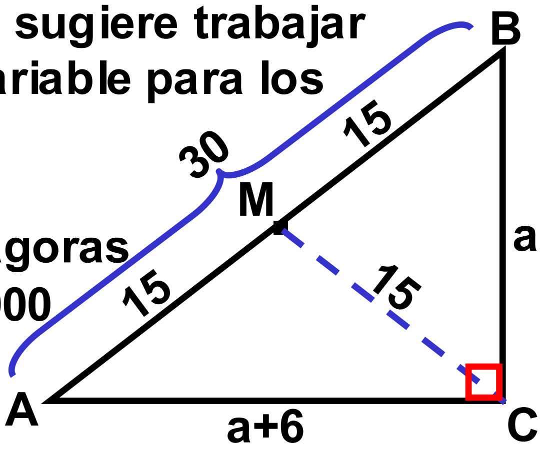


El ejercicio nos sugiere trabajar
con una sola variable para los
catetos: a

$(a+6)^2+a^2=30^2$

Teorema de Pitágoras

$a^2+12a+36+a^2=900$

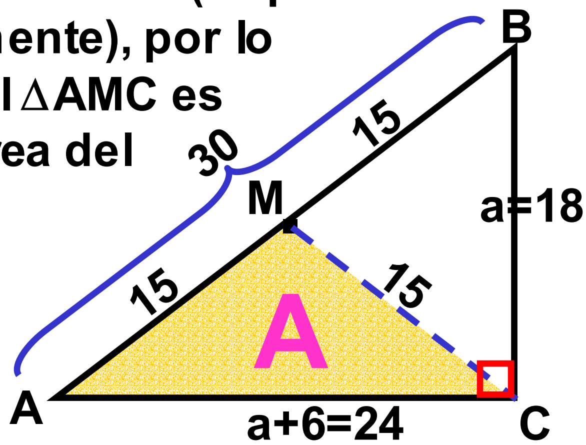


$2a^2+12a+36-900=0 \Rightarrow 2a^2+12a-864=0$

$\Rightarrow a^2+6a-432=0 \Rightarrow (a+24).(a-18)=0$

$\Rightarrow \boxed{a=18}$ ó $a=-24$ imposible.

Los triángulos isósceles AMC y BMC tienen igual área (se puede mostrar fácilmente), por lo que el área del ∆AMC es la mitad del área del ∆ACB.



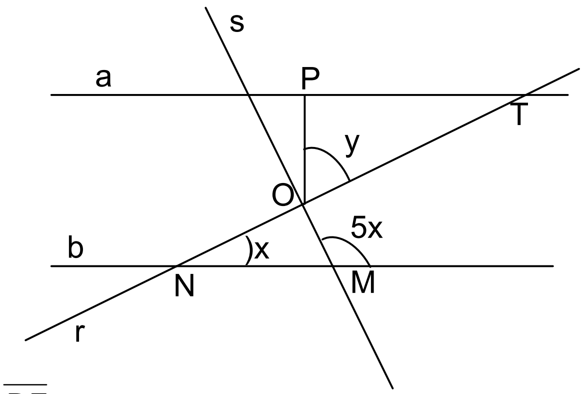
a=18cm

$$A_{\Delta AMC} = \left(\frac{18.24}{2}\right):2 = 108\ cm^2$$

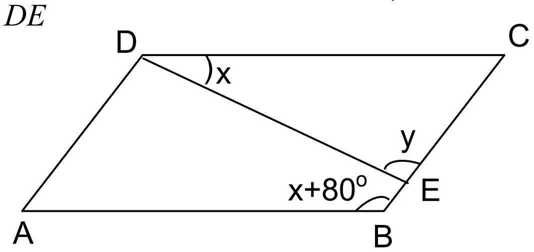
ANEXO 2

AQUÍ SE PRESENTAN 20 EJERCICOS EN LOS CUALES SE HACE NECESARIO LA APLICACIÓN DE VARIABLES Y SE NOS OFRECE EL GRÁFICO PARA SU RESOLUCIÓN.

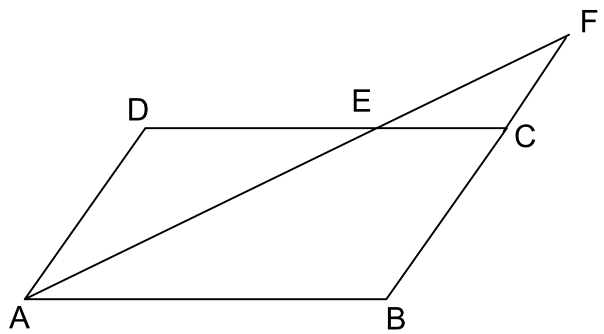
1- En la figura se trazaron las rectas a , b , s y r de manera que $a \parallel b$; $r \perp s$ en el punto O y $\overline{OP} \perp a$. Calcula la amplitud del ángulo ¨y¨



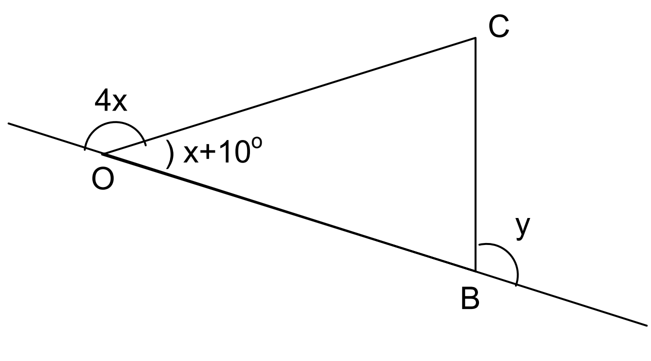
2- En la figura, en el paralelogramo ABCD el segmento $\overline{DE}$ triseca al ángulo ADC.
Calcula la amplitud del ángulo ¨y¨ .



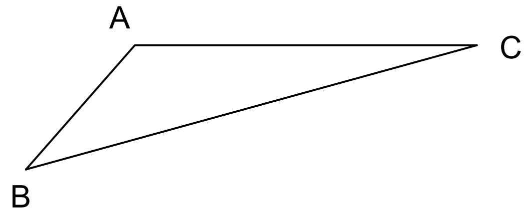
3- En el paralelogramo ABCD el lado $\overline{BC} = 7{,}0cm$ se prolongó hasta el punto F de modo que $\overline{AF}$ corta al lado $\overline{DC}$ en E con $\overline{EF} = 5{,}0cm$. Conocemos que $\overline{AE}$ es 6,0cm mayor que $\overline{EC}$ y que $\overline{AB} = 12cm$. Calcula el perímetro de toda la figura.



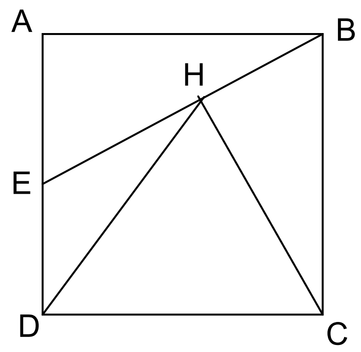
4- En el gráfico el punto A está en la prolongación del lado $\overline{OB}$ del triángulo OBC de manera que $\overline{OB} = \overline{OC}$. Calcula la amplitud del $\angle$y.



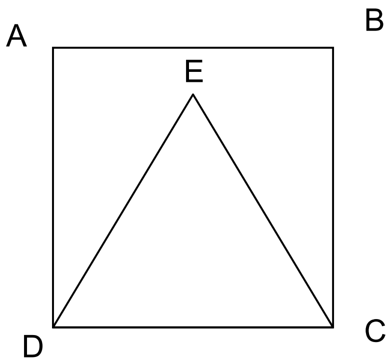
5- En el triángulo ABC se cumplen las siguientes relaciones entre las amplitudes de sus ángulos interiores: $\beta = \frac{2}{5} \cdot \alpha$ y γ tiene el 25% de la amplitud de β. Calcula las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ABC.



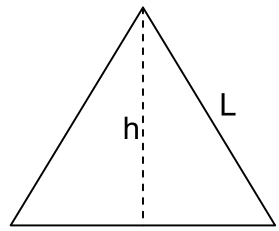
6- ABCD es un cuadrado con perímetro de 52 cm. Se trazó el segmento $\overline{EB}$ de modo que E es punto medio de $\overline{AD}$. El punto H está sobre el segmento $\overline{EB}$ de manera que los triángulos EDH y BHC tienen igual área.
Calcula el área del triángulo DHC.



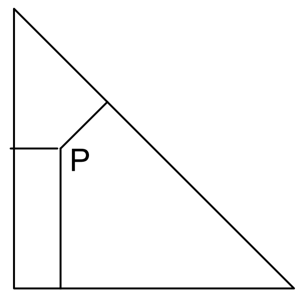
7- En la figura, la diferencia entre las áreas del cuadrado ABCD y del triángulo equilátero DEC es de $13 cm^2$.
Calcula el perímetro del triángulo.



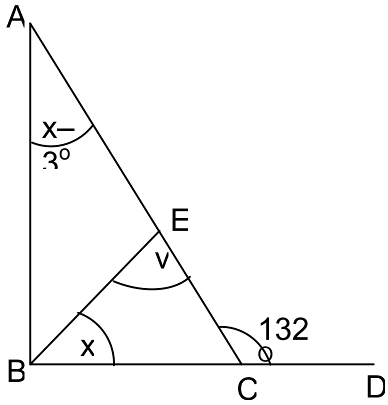
8- En la figura se representa un triángulo equilátero en el que la longitud del lado L supera en 2,0cm a la longitud de su altura h.
Calcula el perímetro del triángulo.



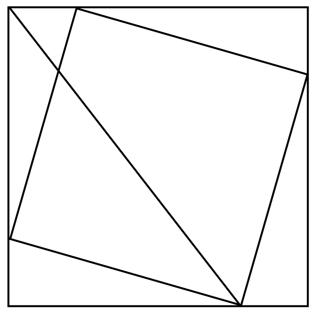
9- La figura nos muestra un triángulo rectángulo isósceles donde el punto interior P dista 1,0cm y 5,0cm de los catetos y, $2\sqrt{2}cm$ de la hipotenusa.
Calcula el área del triángulo.



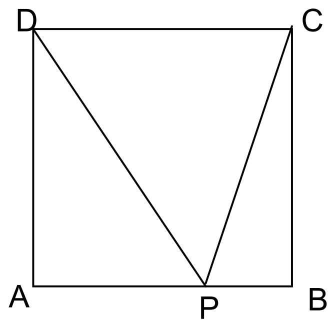
10-En la figura, los puntos B, C y D están alineados y $\overline{BE}$ es bisectriz del $\angle$B.
Calcula la amplitud del $\angle$y .
Clasifica el ΔABC atendiendo a la amplitud de sus ángulos.



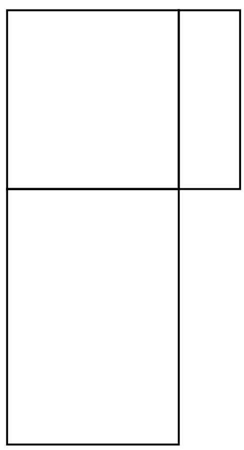
11-Un cuadrado de 20cm de perímetro está inscrito en otro que tiene perímetro de 28cm. Se trazó el mayor segmento posible que une el vértice del cuadrado pequeño con el del cuadrado grande y se obtuvo un trapecio rectángulo.
Calcula el área y perímetro de dicho trapecio.



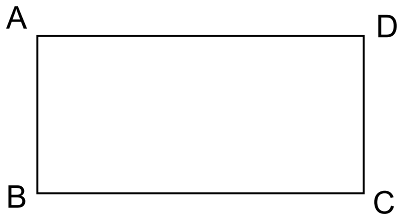
12-Sobre el lado $\overline{AB}$ de un cuadrado ABCD se tomó un punto P de manera que $\overline{PD} = 5{,}0cm$ y $\overline{PC} = \sqrt{17}cm$. Calcula el érea y el perímetro del cuadrado.



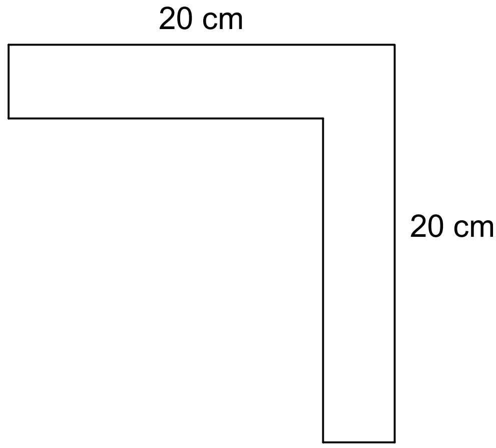
13-Sobre los lados de un cuadrado de 16cm^2 de área se han dibujado dos rectángulos desiguales, como se puede apreciar en la figura.
Si el área de toda la figura es de 80cm^2, calcula su perímetro.



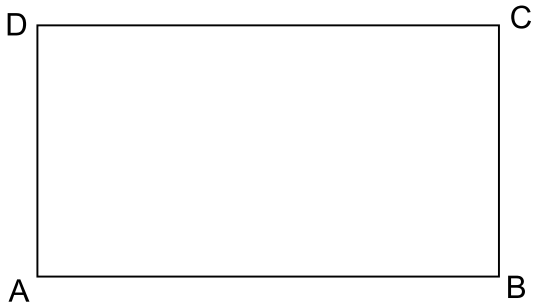
14-En la figura, el rectángulo ABCD tiene perímetro de 24cm y el largo supera al ancho en 5,0 cm. Calcula el área del rectángulo.



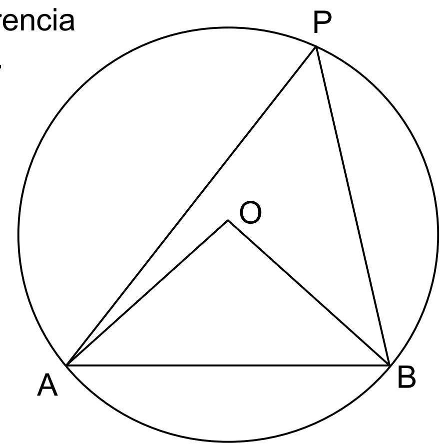
15-Una escuadra de carpintero con ancho constante, como se aprecia en la figura, tiene un área de 111 cm^2. Calcula el ancho de esa escuadra.



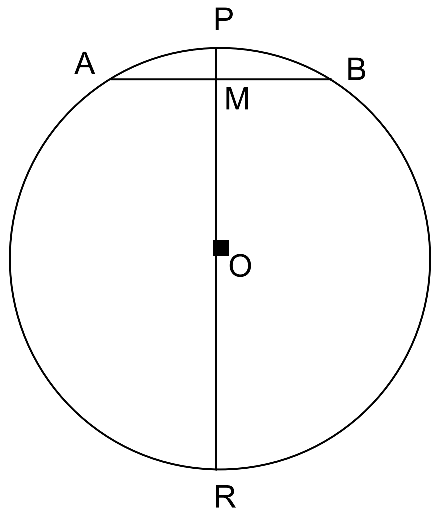
16-Si el largo del rectángulo ABCD, de 165cm^2 de área, se disminuye en 2,0cm y el ancho se aumenta en 2,0cm entonces se convierte en un cuadrado.
Calcula las dimensiones del rectángulo.



17-En la figura, A, B y P son puntos de la circunferencia de centro O . El $\angle P$ es 10^o menor que $\angle OAB$.
Calcula las amplitudes de estos dos ángulos.



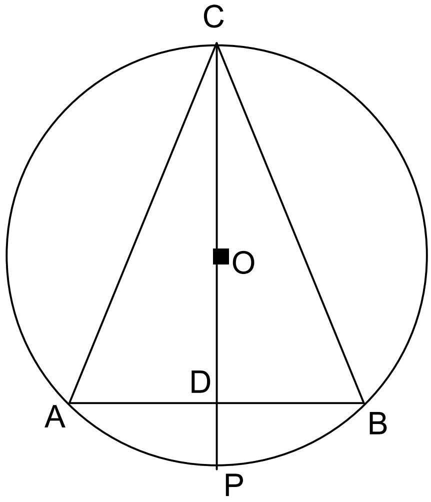
18-En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{PR}$, M es punto medio de $\overline{AB} = 18cm$ y $\overline{PM} = 3{,}0cm$. Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo.



19-En la circunferencia de centro O está inscrito el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$ y se trazó el diámetro $\overline{CP} \perp \overline{AB}$. Se conoce que $\overline{CB}$ es 6,0cm mayor que $\overline{AB}$ y que $\overline{CD}$ es 2,0cm menor que $\overline{CB}$.

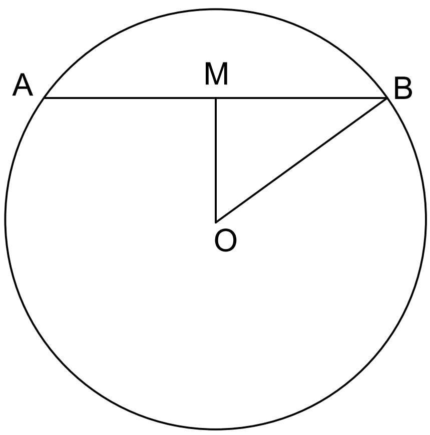
a)Calcula el área y perímetro del ΔABC.

b)Calcula el área del círculo.



20-Una cuerda $\overline{AB}$ de una circunferencia está a 16 cm de distancia del centro O de la misma. Dicha cuerda es 26cm más larga que el radio de la circunferencia.

Calcula el perímetro de la circunferencia.



ANEXO 3

A CONTINUACIÓN SE PROPONEN 60 EJERCICIOS EN LOS CUALES NO APARECE EL GRÁFICO.

1-Una cuerda determina en una circunferencia dos arcos que sus amplitudes están en la razón 4 : 5. Calcula las amplitudes de esos arcos.

2-El lado menor de un triángulo mide 14cm y el lado menor de otro triángulo semejante al primero mide 35cm. Calcula el perímetro de cada triángulo si se conoce que la diferencia entre estos perímetros es de 48cm.

3-Si el radio de un círculo aumenta en tres metros, el área aumenta en $60m^2$. Halla el radio del radio del círculo menor.

4-La diferencia entre las áreas de dos cuadrados es de $72m^2$ y la diferencia entre los lados de cada cuadrado es de 4,0m. Calcula el área de cada cuadrado.

5-En un trapecio isósceles conocemos que la base mayor mide tres veces lo que la menor y que la altura mide 23cm más que lo mide la base menor. Si el área es de $8{,}4dm^2$, calcula el perímetro del trapecio.

6-Un jardín en forma rectangular tiene 0,27ha de superficie y su perímetro mide 210m. ¿Cuáles son sus dimensiones?

7-Una diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos y el perímetro de cada uno de ellos es de 12cm. Calcula la longitud de la diagonal si se conoce que el perímetro del paralelogramo es de 16cm.

8-Un trapecio tiene un de $60m^2$ y una altura de 5,0m. Si la base mayor excede en 4,0m a la base menor. Calcula la longitud de cada base.

9-En un cuadrilátero ABCD los ángulos consecutivos A, B y C tienen una propiedad interesante, la amplitud del $\angle B$ es el triplo de la longitud del $\angle A$ y el $\angle C$ tiene el triplo de la del $\angle B$. Si el $\angle D$ tiene una amplitud de 126^0, calcula las amplitudes de los ángulos A, B y C.

10-En un rombo de 60cm de perímetro se sabe que la diagonal mayor supera en 6,0cm a la menor. Calcula el área del rombo.

11-El área de un rombo es $240cm^2$ y su lado mide 17cm. Calcula la longitud de sus diagonales.

12-En un triángulo el ángulo mediano supera en 40^0 al menor y el ángulo mayor tiene 5 veces la amplitud del ángulo menor.

a)- Calcula las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo.

b)- Clasifica el triángulo atendiendo a la amplitud de sus ángulos.

13-En un triángulo un ángulo exterior tiene una amplitud de 100^0 y conocemos que los ángulos interiores no adyacentes a él se diferencian en 50^0.

a)- Calcula las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo.

b)- Clasifica el triángulo atendiendo a la longitud de sus lados.

14-Si uno de los ángulos de un triángulo isósceles es el cuádruplo del otro,

a)- ¿Cuáles son las amplitudes de sus tres ángulos?

b)- ¿Es única la solución de este problema?

15-En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos supera en 34^0 al 20% del otro ángulo. Calcula las amplitudes de esos ángulos agudos.

16-El perímetro de un triángulo rectángulo es de 24cm y la hipotenusa mide 10cm. Calcula su área.

17-Los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón 33:56 y su hipotenusa mide 6,5cm. Calcula el perímetro de este triángulo.

18-Halla los lados de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 20 y 10cm más cortos que la hipotenusa.

19-En un triángulo con un lado de 8,0cm y otro de 4,0cm se trazaron las alturas correspondientes a estos lados. La altura correspondiente al lado de 4,0cm supera en 3,0cm a la correspondiente al lado de 8,0cm.

a)- Calcula el área del triángulo.

b)- Investiga si existe un único triángulo que cumple esta condición.

20-El perímetro de un triángulo rectángulo es de 24cm y la mediana relativa a su hipotenusa mide 5,0cm. Calcula el área del triángulo.

21-La longitud del lado de un triángulo equilátero es 2,0cm mayor que la longitud del lado de un cuadrado. La suma de los perímetros del triángulo y del cuadrado es de 69cm. Calcule la longitud de cada polígono.

22-Calcula los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la suma de los tres lados es 132 y que la suma de sus cuadrados es 6050.

23-En un triángulo la suma de las amplitudes del ángulo mediano con el menor excede en 36^0 al ángulo mayor, y la suma del ángulo mayor con el mediano es igual al triplo del ángulo menor. Calcula las amplitudes de los tres ángulos.

24-En un trapecio isósceles la base mayor mide 16cm y la longitud de la base menor duplica la del lado. Si el perímetro del trapecio es 36cm, calcula el área de este trapecio.

25-En el cuadrilátero ABCD de 4,8dm^2 de superficie sabemos que su diagonal mide 34cm. Calcula su perímetro.

26-La diagonal de un rectángulo excede en 3,0cm a su largo y el ancho mide 9,0cm. Calcula el área del rectángulo.

27-Un rectángulo tiene un área de 48cm^2 y el ancho es el 75% de su largo. Halla las dimensiones del rectángulo.

28-Se sabe que un polígono plano de n lados ($n \geq 3$) tiene siempre $(½).(n-3).n$ diagonales. ¿Cuál es el polígono que tiene 54 diagonales?

29-La base mayor de un trapecio mide 50cm. La base menor es igual a la altura y el área es de 12dm^2. ¿Cuánto mide la base menor?

30-Un lado de un rectángulo es 7,0cm más largo que el otro. La diagonal es 1,0cm mayor que el lado más largo. Halla el área del rectángulo.

31-El piso de un salón rectangular tiene 2400 mosaicos cuadrados. Si cada mosaico tuviese 5,0cm menos de lado entonces se necesitarían 3750 mosaicos para poder cubrir el piso. Calcula las dimensiones de los mosaicos.

32-A un cuadro rectangular de 1,5m de largo por 90cm de ancho se le pone un marco plano de ancho constante. Si el área total del marco y el cuadro es de 1,6m^2. ¿Cuál es el ancho del marco?

33-Los lados mayores de dos rectángulos de igual área miden 8,5cm y 1,9cm de longitud respectivamente. La diferencia entre los lados menores es de 1,4cm. ¿Cuál es el área de los rectángulo?

34-El largo de un rectángulo es al ancho como 5 es a 3 y su perímetro es 112cm. Halla las dimensiones del rectángulo.

35-En un trapecio isósceles la base mayor excede en 3,0cm a la base menor y esta a su vez excede en 2,0cm a cada lado. Si el perímetro del trapecio es 19cm, calcula la longitud de todos los lados de este cuadrilátero.

36-La base de un rectángulo es 6,0dm mayor que su altura. Si la base aumenta en 4,0dm y la altura disminuye en 2,0dm el área aumenta en 8,0dm^2. Calcula las dimensiones del rectángulo.

37-El largo de un rectángulo excede en 24cm al lado de un cuadrado que tiene su misma área y su ancho es 12cm menor que el lado del referido cuadrado. Halla el área del rectángulo.

38-Si el lado de un cuadrado se disminuye en 2,0cm entonces su área disminuye $28cm^2$. Calcula la longitud original del lado del cuadrado.

39-Un rectángulo tiene 20,0m más de largo que de ancho. Si el largo tuviese 100m más y el ancho 40,0m menos, el área sería la misma. Halla las dimensiones del rectángulo primitivo.

40-Si un rectángulo tuviera 1,0m más de largo y 1,0m más de ancho el área aumentaría $16m^2$ y si tuviera 3,0m menos de largo y 2,0m más de ancho su área aumentaría $19m^2$ respecto al rectángulo original. Halla las amplitudes del rectángulo original.

41-El perímetro de un triángulo isósceles es igual a 160cm. La longitud de uno de los lados es 1,5 veces la de la base. ¿Qué longitud tiene los lados del triángulo?

42-Los ángulos interiores de un triángulo están en la proporción 3:5:10. Calcula la amplitud de cada ángulo.

43-El perímetro de una sala rectangular es de 56m. Si el largo disminuye 2,0m y el ancho aumenta 2,0m y el ancho aumenta 2,0m entonces la sala se hace cuadrada.

44-En un rectángulo la medida del largo es 15cm y la de su ancho 8,0cm. ¿En cuántos centímetros habrá que disminuir el largo y el ancho para que la medida de la diagonal disminuya en 4,0cm?

45-El perímetro de un rectángulo es de 62cm y su diagonal mide 25cm. Calcula el área del rectángulo.

46-El largo de una sala rectangular excede a su ancho en 4,0m. Si cada dimensión se aumenta en 4,0m entonces el área será el doble de la original. ¿Cuáles son las dimensiones de la sala?

47-El área de un rectángulo es de $36cm^2$. Si su largo crece en 3,0cm y su ancho en 2,0cm entonces su área se duplica. Calcula sus dimensiones.

48-Una parcela de tierra de $375m^2$ tiene una forma rectangular y uno de sus lados representa el 60% de la longitud del otro. Calcula el perímetro de esta parcela.

49-La base mayor de un trapecio mide 50cm y su área es de $12dm^2$. Calcula la longitud de la base menor si conocemos que es igual a su altura.

50-El área de un rombo es $2,4dm^2$ y su lado mide 17cm. Calcula sus diagonales.

51-En un trapecio con área de $60cm^2$ la base mayor supera en 4,0cm a la menor y la altura es la mitad de la base menor. Calcula la altura, la base mayor y la menor.

52-De un rombo conocemos que su área es $216cm^2$ y el perímetro es 60cm. Calcula la diagonal mayor y menor.

53-Un triángulo ABC, rectángulo en C, tiene un perímetro de 84cm. Su hipotenusa mide 37cm.
a)- Calcula su área.
b)- Calcula la altura relativa a la hipotenusa.

54-Un terreno rectangular tiene un perímetro de 34m y un área de $60m^2$. ¿Qué longitud debe tener la cerca que lo divide en dos triángulo iguales?

55-Una cuerda $\overline{AB}$ de una circunferencia está a 16 cm de distancia del centro O de la misma. Dicha cuerda es 26 cm más larga que el radio de la circunferencia. Calcula el perímetro de la circunferencia.

56-Se tienen dos planchas, una de zinc y otra de aluminio de igual área y se corta un cuadrado de cada plancha de manera que sobran 5,0 m^2 de la plancha de zinc y 14 m^2 en la de aluminio. Si la longitud del lado del cuadrado recortado de la plancha de aluminio es igual al 80% de la longitud del lado del cuadrado que se recortó de la plancha de zinc ¿cuál es el área de cada cuadrado recortado?

57-De un trapecio de 49 cm^2 de área se conoce que la base menor mide 4,0 cm y que la base mayor excede en 3,0 cm a la altura. Calcula el área que tendría el trapecio si las base mayor fuese 2,0 cm más corta.

58-En un triángulo isósceles uno de los lados iguales es 1,0 cm mayor que su altura relativa. Si el área del triángulo es de 300 cm^2 , calcula el perímetro de dicho triángulo.

59-En un trapecio M la diferencia entre las longitudes de las bases es de 8,0 cm. Existe otro trapecio N con las mismas bases que el M pero con altura 5,0 cm mayor que la de este último. Si la diferencia entre sus áreas es de 30 cm^2, calcula las longitudes de las bases de los trapecios.

60-En un rectángulo la distancia desde un vértice hasta la diagonal es 8,0 cm menor que el lado mayor de dicho rectángulo. Si el perímetro del rectángulo mide 70 cm , calcula su área.